

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念



对点上分

1. D 【解析】对于 A, 集合 M 中的元素 2 对应集合 N 中的元素 1 和 3, 不符合函数定义, 不是函数, 故错误;

对于 B, 集合 M 中的元素 3 在集合 N 中没有元素与其对应, 不是函数, 故错误;

对于 C, 箭头应从集合 M 中的元素指向集合 N 中的元素, 故错误;

对于 D, 符合函数定义, 所以是函数, 故正确.

2. ABD 【解析】对于选项 C, 当 $x > 0$ 时, 有 2 个函数值与 x 对应, 不符合函数定义, 其余选项均符合函数定义, 故选 ABD.

易错警示 忽略函数定义中函数值 y 的唯一性而致错

函数中一个自变量只能对应一个函数值, 不能出现一对多的情况, 但值域中的一个元素可以与定义域中的多个或无数个元素对应.

3. D 【解析】对于 A, 当 $y = 1$ 时, $x^2 + 1 = 0$, 无实数解, 即在 $(-\infty, 0)$ 内不存在唯一确定的实数 x 与 $y = 1$ 对应, 不符合函数定义, 故 A 不正确;

对于 B, 当 $y = -1$ 时, $x^2 - 1 = 0$, 解得 $x = \pm 1$, 不满足唯一确定的实数 x 与 $y = -1$ 对应, 不符合函数定义, 故 B 不正确;

对于 C, 当 $x = 0$ 时, 由 $x^2 + y = 0$, 得 $y = 0 \notin (-\infty, 0)$, 即在 $(-\infty, 0)$ 内不存在唯一确定的实数 y 与 $x = 0$ 对应, 不符合函数定义, 故 C 错误;

对于 D, 由 $x^2 + y = 0$, 得 $y = -x^2$, 对 $\forall x \in (-\infty, 0)$, 都有唯一确定的 y 与之对应, 符合函数定义, 故 D 正确.

故选 D.

4. 1 0 【解析】由题中函数的图象可得 $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, 则 $f(f(4)) = f(2) = 0$.



5. A



攻略上分

题目所给函数为具体函数,先从左到右观察,分别是二次根式和分式,再从外到内观察,列不等式求解.

【解析】对于函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, 令

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < x \leq 1, \text{ 所以函数 } f(x) =$$

$\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0, 1]$. 故选 A.

6. A 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{1}{ax^2 - ax + 1}$ 的

定义域为 \mathbf{R} , 所以 $ax^2 - ax + 1 \neq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

①当 $a=0$ 时, $1 \neq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立;

②当 $a \neq 0$ 时, 只需 $\Delta = a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 4$.

综上, $0 \leq a < 4$.

记集合 $A = (0, 4)$, $B = [0, 4)$.

因为 A 是 B 的真子集, 所以“函数 $f(x) =$

$\frac{1}{ax^2 - ax + 1}$ 的定义域为 \mathbf{R} ”是“ $0 < a < 4$ ”的

必要不充分条件. 故选 A.

易错警示

忽略对参数的分类讨论而致错

求定义域, 特别是二次项系数含参数时, 要注意二次项系数为零的情形, 避免遗漏特殊情形下的值或范围.

7. D 【解析】由题可知 $f(x) = \sqrt{2-x}$ 的定义域为 $(-\infty, 2]$, 因为 $g(x) =$

$$f(2x) + f(x^2), \text{ 所以 } \begin{cases} 2x \leq 2, \\ x^2 \leq 2, \end{cases} \text{ 解得}$$

$-\sqrt{2} \leq x \leq 1$, 所以 $g(x)$ 的定义域为

$[-\sqrt{2}, 1]$. 故选 D.

8. A 【解析】由函数 $f(3x+2)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 即 $0 < x < 1$, 得 $2 < 3x+2 < 5$, 令 $2 < 2x-$

$1 < 5$, 解得 $\frac{3}{2} < x < 3$, 所以函数 $f(2x-1)$ 的定

义域为 $(\frac{3}{2}, 3)$. 故 A 正确.

**易错警示** 忽略抽象函数的特征而致错

函数的定义域是函数自变量 x 的取值范围, 即若函数 $f(g(x))$ 的定义域为 A , 指的是 $x \in A$, 而不是 $g(x) \in A$.

9. C 【解析】由题意可知炮弹发射后共飞行了 20 s, 所以 $0 \leq t \leq 20$, 即函数 $h = 100t - 5t^2$ 的定义域为 $[0, 20]$. 故选 C.

10. $\{x | 12 \leq x \leq 28\}$ 【解析】已知矩形的一条边为 x m, 设与其相邻的边为 y m, 由三角形相似得 $\frac{x}{40} = \frac{40-y}{40}$ ($0 < x < 40, 0 < y < 40$), 所以 $x+y=40$, 矩形草坪的面积 $S = xy = x(40-x) \geq 336$, 解得 $12 \leq x \leq 28$. 故 x 的取值范围为 $\{x | 12 \leq x \leq 28\}$.

11. D



攻略上分 函数 $f(x)$ 为二次函数, 求其值域时可利用攻略中的“直接法”求解.

【解析】 \because 函数 $f(x) = x^2 - 1$ 的值域为 $[-1, +\infty)$, $\therefore A = \{y | y \geq -1\}$, 即 $A = [-1, +\infty)$. 观察四个选项, 只有 -2 不是 A 中的元素. 故选 D.

12. B 【解析】函数 $y = x^2 - 2x + 2$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = 1$, 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, y 随着 x 的增大而减小, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, y 随着 x 的增大而增大.

对于 A, $x \in [-1, 0]$, 因为当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 当 $x = -1$ 时, $y = 5$, 所以值域为 $[2, 5]$, 故 A 错误;

对于 B, $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, 因为 $|0 - 1| > \left|\frac{3}{2} - 1\right|$, 当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 所以值域为 $[1, 2]$, 故 B 正确;

对于 C, $x \in [1, 3]$, 因为当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 当 $x = 3$ 时, $y = 5$, 所以值域为 $[1, 5]$, 故 C 错误;

对于 D, $x \in [-1, 1]$, 因为当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 当 $x = -1$ 时, $y = 5$, 所以值域为 $[1, 5]$, 故 D 错误.

13. D



攻略上分 函数 $f(x)$ 的解析式为分式且分子分母的次数相同, 求其值域时可利用“分离常数法”求解.



【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为

$$\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{3}\right\}, f(x) = \frac{2x-3}{3x+1} = \frac{\frac{2}{3}(3x+1) - \frac{11}{3}}{3x+1} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{11}{3}}{3x+1} \neq \frac{2}{3},$$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. 故选 D.

14. A



攻略上分

函数解析式中含有根式, 可利用“换元法”, 令 $\sqrt{1-2x} = t$, 再结合二次函数的图象和性质求值域.

【解析】由题意知, 函数的定义域为

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right], y = 1 + x + \sqrt{1-2x} = -\frac{1}{2}(\sqrt{1-2x})^2 + \sqrt{1-2x} + \frac{3}{2}, \text{ 令}$$

$$\sqrt{1-2x} = t, t \in [0, +\infty), \text{ 则 } y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2}, \text{ 由二次函数的图象和性质可知,}$$

当 $t \in [0, 1]$ 时, y 随 t 的增大而增大, 当 $t \in (1, +\infty)$ 时, y 随 t 的增大而减小, 所以

$$y \leq -\frac{1}{2} \times 1^2 + 1 + \frac{3}{2} = 2, \text{ 当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时,}$$

$y \rightarrow -\infty$, 故函数 $y = 1 + x + \sqrt{1-2x}$ 的值域为 $(-\infty, 2]$, 故选 A.

15. C 【解析】令 $t = \sqrt{f(x)-1}$, 则 $t \in (0, 3)$, $f(x) = t^2 + 1$, 则 $g(x) = h(t) = t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3$, $t \in (0, 3)$, 设 $m(t) = (t-2)^2 - 3$, $t \in \mathbf{R}$, 则 $m(t)$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $t = 2$, 又 $|0-2| > |3-2|$, $m(2) = -3$, $m(0) = 1$, 所以函数 $h(t)$ 的值域为 $[-3, 1)$, 即 $g(x)$ 的值域为 $[-3, 1)$. 故选 C.

方法总结

形如 $g(x) = mx + n \pm \sqrt{ax+b}$ ($am \neq 0$) 的无理函数, 一般令 $t = \sqrt{ax+b}$, 将已知函数转化为二次函数, 但要注意确定 t 的取值范围. 当然, 这也适用于形如 $g(x) = mx^2 + n \pm \sqrt{ax^2+b}$ ($am \neq 0$) 的函数.


16. D 【解析】令 $y = f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$,

$$\text{则 } \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } -2 \leq x \leq 2, \text{ 所以函}$$



数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 则 $y^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2}$.

因为 $-2 \leq x \leq 2$, 所以 $0 \leq x^2 \leq 4$, 所以 $0 \leq 4-x^2 \leq 4$, 所以 $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$, 所以 $4 \leq y^2 \leq 8$, 显然 $y > 0$,

 **提示:** 注意二次根式的值一定是非负数

所以 $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$, 即该函数的值域为 $[2, 2\sqrt{2}]$. 故选 D.

17. C 【解析】显然, $f(0) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f(x) &= \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{2} = \\ \frac{2(x+1)^2 - (x^2+1)}{2(x^2+1)} &= \frac{x^2+4x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2} + \\ \frac{2}{x+\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

令 $t = x + \frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, $t = x + \frac{1}{x} \geq$

$$2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时, 等号}$$

成立, 则 $0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{2}$;

当 $x < 0$ 时, $t = x + \frac{1}{x} \leq -2$.

$$\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = -2, \text{ 当且仅当 } x =$$

-1 时, 等号成立, 则 $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{t} < 0$, 则

$$-\frac{1}{2} \leq f(x) < \frac{1}{2}.$$

综上, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, 所以

根据高斯函数的定义, 函数 $y = [f(x)]$ 的值域是 $\{-1, 0, 1\}$, 故选 C.

18. ABC 【解析】函数 $f(x-2)$ 中的 x 需满足 $-3 \leq x-2 \leq 3$, 解得 $-1 \leq x \leq 5$, 即函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[-1, 5]$, 故 A 正确;

函数 $\frac{f(3x)}{x-1}$ 中的 x 需满足

$$\begin{cases} -3 \leq 3x \leq 3, \\ x-1 \neq 0, \end{cases} \text{ 解得 } -1 \leq x < 1, \text{ 即函数}$$

$\frac{f(3x)}{x-1}$ 的定义域为 $[-1, 1)$, 故 B 正确;

函数 $f(x-2)$ 和 $f(2x)$ 的值域都为 $[-3, 3]$, 故 C 正确, D 错误.



19. D 【解析】对于 A, $y=2|x|$ 和 $y=2x$ 的对应关系不相同, 不是同一个函数, 故选项 A 不符合题意;

对于 B, $y=\sqrt{4x^2}=2|x|$ 和 $y=2x$ 的对应关系不相同, 不是同一个函数, 故选项 B 不符合题意;

对于 C, 函数 $y=\frac{2x^2}{x}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 函数 $y=2x$ 的定义域为 \mathbf{R} , 定义域不相同, 不是同一个函数, 故选项 C 不符合题意;

对于 D, 函数 $y=\sqrt[3]{8x^3}=2x$ 与 $y=2x$ 的定义域和对应关系都相同, 是同一个函数, 故选项 D 符合题意.

故选 D.

关键点拨

判断两个函数是否为同一个函数, 要严格按定义三要素: 对应关系、定义域和值域来检验. 注意, 由定义域和对应关系即可以确定函数的值域, 故通过比较两个函数的定义域和对应关系就可确定两个函数是否相同, 但有时为了方便, 也用函数的值域进行判断, 若值域不同, 则必不是相同的函数.

20. C 【解析】对于 A, $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$, $g(x)=x$, 对应关系不同, 不是同一函数, 故错误;

对于 B, $f(x)=1$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x)=x^0$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 定义域不同, 不是同一函数, 故错误;

对于 C, $g(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$ 与

$f(x)$ 的对应关系相同, 且 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 是同一函数, 故正确;

对于 D, $f(x)=x+3$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ 的定义域为 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, 定义域不同, 不是同一

函数, 故错误.



能力上分

1. A 【解析】对于 A, 当水面对应的圆的直径 d 确定时, 水面的高度 h 有两种可



能,即 d 的一个值可能对应两个 h 的值,故 h 不是 d 的函数,即 A 错误;

对于 B,当时间 t 确定时,水面对应圆的直径 d 也唯一确定,故 d 是 t 的函数,即 B 正确;

对于 C,当时间 t 确定时,水面的高度 h 也唯一确定,故 h 是 t 的函数,即 C 正确;

对于 D,当水面高度 h 确定时,水面对应圆的直径 d 也唯一确定,故 d 是 h 的函数,即 D 正确. 故选 A.

2. A 【解析】由题可得
$$\begin{cases} 0 \leq 2x \leq 6, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$$

解得 $0 \leq x < 2$ 或 $2 < x \leq 3$. 故 A 正确.

3. AB 【解析】对于 A, 因为 $f(x) =$

$$\frac{5}{2x^2-4x+3} = \frac{5}{2(x-1)^2+1}, \text{ 所以 } 0 < f(x) \leq 5, \text{ 所以 } |f(x)| \leq 5, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, 因为 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 所以 $1-x^2 \geq 0$, 所以 $0 \leq x^2 \leq 1$, 所以 $0 \leq f(x) \leq 1$, $|f(x)| \leq 1$, 故 B 正确;

对于 C, $f(x) = \frac{3+x}{4-x} = \frac{-(4-x)+7}{4-x} = -1 + \frac{7}{4-x}$, 不存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$, 故 C 错误;

对于 D, $f(x) = 1 - \sqrt{x} \leq 1$, 不存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$, 故 D 错误. 故选 AB.

4. $[-2, 7]$ 【解析】当 $x \in (0, 2]$ 时, $x^2 \in (0, 4]$, $f(x) = (x^2-1)^2-2$.

当 $x^2 = 1$, 即 $x = 1$ 时, $f(x) = -2$, 当 $x^2 = 4$, 即 $x = 2$ 时, $f(x) = 7$, 结合二次函数的图象和性质可知, 值域为 $[-2, 7]$.

5. $\frac{1\ 349}{2}$ 【解析】因为 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$$\frac{x}{3+3x} + \frac{\frac{1}{x}}{3+3 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1+x}{3+3x} = \frac{1}{3}, f(1) = \frac{1}{6},$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{2\ 024}\right) + f\left(\frac{1}{2\ 023}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2\ 023) + f(2\ 024) = \frac{1}{3} \times 2\ 023 + \frac{1}{6} = \frac{4\ 047}{6} = \frac{1\ 349}{2}.$$

6. 【解】(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $mx^2-8x+m+6 \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $m = 0$ 时, $-8x+6 \geq 0$ 不恒成立, 不合

题意;

当 $m \neq 0$ 时, 由题意可得

$$\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 64 - 4m(m+6) \leq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } m \geq 2.$$

综上, m 的取值范围为 $[2, +\infty)$.

(2) 设函数 $y = mx^2 - 8x + m + 6$ 的值域为 D .

因为 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 所以 $[0, +\infty) \subseteq D$.

当 $m = 0$ 时, $f(x) = \sqrt{-8x+6}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 满足题意;

当 $m \neq 0$ 时, 由题意知

$$\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 64 - 4m(m+6) \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < m \leq 2.$$

综上, m 的取值范围为 $[0, 2]$.

7. 【解】(1) 由题意得 $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x \in [0, 2]$,

$$[f(x)]^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^2 = x + 2 - x + 2\sqrt{x(2-x)} = 2 + 2\sqrt{-(x-1)^2 + 1},$$

当 $x \in [0, 2]$ 时, $-(x-1)^2 + 1 \in [0, 1]$,

$$\therefore [f(x)]^2 \in [2, 4].$$

$$\because f(x) \geq 0, \therefore f(x) \in [\sqrt{2}, 2].$$

综上, $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 值域为 $[\sqrt{2}, 2]$.

$$(2) h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} - a\sqrt{x(2-x)},$$

$$\text{令 } t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \in [\sqrt{2}, 2],$$

$$\text{则 } t^2 = 2 + 2\sqrt{x(2-x)}, \text{ 则 } \sqrt{x(2-x)} = \frac{t^2 - 2}{2}.$$

$$\text{设 } F(t) = t - a \frac{t^2 - 2}{2} = -\frac{a}{2}t^2 + t + a, t \in [\sqrt{2}, 2].$$

若 $a < 0$, 则此时二次函数 $F(t)$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $t = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{a} < 0 < \sqrt{2}$,

$$\text{则 } F(t)_{\max} = F(2) = 2 - a.$$

若 $a > 0$, 则此时二次函数 $F(t)$ 的图象开口向下, 对称轴为直线 $t = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{a} > 0$.

① 当 $\frac{1}{a} > 2$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $F(t)_{\max} = F(2) = 2 - a$;

② 当 $\sqrt{2} \leq \frac{1}{a} \leq 2$, 即 $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,



$$F(t)_{\max} = F\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{2a};$$

③当 $0 < \frac{1}{a} < \sqrt{2}$, 即 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $F(t)_{\max} = F(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

$$\text{综上, } m(a) = \begin{cases} 2-a, & a < \frac{1}{2} \text{ 且 } a \neq 0, \\ a + \frac{1}{2a}, & \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{2}, & a > \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

3.1.2 函数的表示法



对点上分

1. B 【解析】因为 $x=1$ 满足 $x \in (0, 2]$, 所以 $m=f(1)=-2$,

由题表可知 y 的取值仅有三个: $1, 0, -2$, 所以 $f(x)$ 的值域 $M=\{1, 0, -2\}$, 故选 B.

提示: 本题函数 $f(x)$ 用列表法表示, 值域是表格中实数 y 的集合

2. D 【解析】依题意, 函数 $y =$

$$\begin{cases} x-1, & x < 0, \\ x+1, & x > 0 \end{cases} \text{ 的定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

其图象由直线 $y=x-1$ 在 $x < 0$ 的部分与直线 $y=x+1$ 在 $x > 0$ 的部分组成, 故 D 正确.

易错警示 画函数图象时忽略等价变形而致错

在对函数解析式进行变形的过程中, 一定要注意等价性, 特别要注意定义域是否发生变化.

3. AD 【解析】因为 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$,

$$\text{所以 } f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = f(x),$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = -f(x).$$

故 AD 正确.

4. A 【解析】由题图可知该火炬中间细, 上下粗, 燃烧时燃料以均匀的速度消耗, 燃料的高度一直在下降, 刚开始时下降的速度越来越快, 燃料到达火炬最细处后, 燃料的高度下降得越来越慢, 结合选



项中图象,可知 A 正确.

5. B 【解析】因为函数 $f(x)$ 是一次函数,所以设 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$.

因为 $f(x-1) = 4x + 3$, 所以 $a(x-1) + b =$

$4x + 3$, 则 $\begin{cases} a = 4, \\ -a + b = 3, \end{cases}$ 解得 $a = 4, b = 7$, 所以

函数 $f(x) = 4x + 7$. 故 B 正确.

6. A



攻略上分

本题已知复合函

数 $f(\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x}$ 的解析式, 求

$g(x) = f(x+1)$ 的解析式, 因此须先求

出 $f(x)$ 的解析式, 可用“换元法”或

“配凑法”.

【解析】换元法: 设 $t = \sqrt{x} - 1 (t \geq -1)$,

则 $x = (t+1)^2$, 所以 $f(t) = t^2 - 1 (t \geq -1)$,

要使得 $g(x) = f(x+1)$ 有意义, 则需 $x +$

$1 \geq -1$, 解得 $x \geq -2$, 所以 $g(x) = (x +$

$1)^2 - 1 (x \geq -2)$, 故选 A.



一题多解

配凑法: 因为 $f(\sqrt{x} - 1) = x -$

$2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$, 且 $\sqrt{x} - 1 \geq -1$, 所

以 $f(x) = x^2 - 1 (x \geq -1)$, 所以

$g(x) = f(x+1) = (x+1)^2 - 1 (x+1 \geq$

$-1)$, 即 $g(x) = (x+1)^2 - 1 (x \geq -2)$,

故选 A.



易错警示

求解析式时忽略函数的定

义域而致错

已知函数 $y = f(g(x))$ 的解析式,

求函数 $y = f(x)$ 的解析式时, 若函数

$y = g(x)$ 的值域不是全体实数, 则所求

得的函数 $y = f(x)$ 的解析式必须写明

定义域(即函数 $y = g(x)$ 的值域), 如

本题中函数 $y = f(x)$ 的定义域就是 $y =$

$\sqrt{x} - 1$ 的值域.

7. D



攻略上分

所给出的等式是

含 $f(x), f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的方程, 因此可考虑


利用“消元法”求 $f(x)$ 的解析式.

【解析】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$+\infty)$, 因为 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 6x +$



$$\frac{4}{x} \quad \text{①},$$

 **方法**: 已知的函数关系较为抽象, 可以对变量进行置换消元

$$\text{所以当 } x = \frac{1}{x} \text{ 时, } 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x + \frac{6}{x} \quad \text{②},$$

由 ② $\times 2$ - ①, 得 $3f(x) = 2x + \frac{8}{x}$, 所以

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3x}, \text{ 故选 D.}$$

8. D



攻略上分

已知等式中涉及两个变量, 求函数值时可以先考虑利用“赋值法”求出函数的解析式, 再求函数值.

【解析】 令 $x=y=0$, 得 $f(0)=1$.

令 $x=0$, 得 $-f(y)-2f(-y)=y-3$ ①,

将上式中的 y 换成 $-y$, 可得 $-f(-y)-2f(y)=-y-3$ ②,

联立 ① ②, 可得 $f(y)=y+1$, 所以 $f(2\,024)=2\,024+1=2\,025$, 故选 D.

9. (1) **【证明】** 由题意可知 $\angle AED = \angle CEB'$,
 $\angle ADE = \angle CB'E$, $AD = CB'$,

所以 $\triangle ADE \cong \triangle CB'E$, 所以 $AE = CE$,
 $DE = B'E$,

所以 $CE + CB' + B'E = CE + AD + DE = AD + DC = \frac{8}{2} = 4$.

所以 $\triangle B'EC$ 的周长为定值.

(2) **【解】** 由题可知 $AB' = AE + B'E = AB = x$, 所以 $AE = x - B'E$, 即 $CE = x - B'E$,

由 (1) 知 $CE + CB' + B'E = 4$, 即 $(x - B'E) + CB' + B'E = 4$, 所以 $CB' = 4 - x$,

在 $\text{Rt} \triangle B'EC$ 中, 由勾股定理可得 $B'E^2 + B'C^2 = CE^2$, 即 $B'E^2 + (4 - x)^2 = (x - B'E)^2$,

$$\text{得 } B'E = 4 - \frac{8}{x}.$$

因为 $AB > AD$, $AB + AD = 4$, 所以 $x > 4 - x$

且 $x < 4$, 即 $2 < x < 4$, 所以 $B'E = 4 - \frac{8}{x}$ ($2 < x < 4$).

$$\frac{8}{x} (2 < x < 4).$$

(3) **【解】** 在 $\text{Rt} \triangle B'EC$ 中, $S = \frac{1}{2} B'C \cdot$

$$B'E = \frac{1}{2} (4 - x) \left(4 - \frac{8}{x} \right) = 12 - \frac{16}{x} - 2x,$$

$$2 < x < 4,$$

$$\text{所以 } S = 12 - \frac{16}{x} - 2x = 12 - \left(\frac{16}{x} + 2x \right) \leq$$

$$12 - 2\sqrt{\frac{16}{x} \cdot 2x} = 12 - 8\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{16}{x} =$$

$2x$, 即 $x = 2\sqrt{2}$ 时, 等号成立,

所以当 $x = 2\sqrt{2}$ 时, $\triangle B'EC$ 的面积 S 取得最大值 $12 - 8\sqrt{2}$.

10. D 【解析】由条件可得 $f(-1) = 2$, 所以 $f(f(-1)) = f(2) = 6$, 故选 D.

11. D 【解析】当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 的值域为 $(1, +\infty)$.

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} x, & x > 1, \\ 2x, & x \leq 1, \end{cases} \text{ 符合题意.}$$

当 $a > 0$ 时, 函数 $y = ax^2 + 2x$ 的图象开口向上, 不符合题意.

$$\text{当 } a < 0, \text{ 且 } -\frac{2}{2a} \leq 1, \text{ 即 } a \leq -1 \text{ 时, } f(x)$$

$$\text{在 } (-\infty, 1] \text{ 上的最大值为 } f\left(-\frac{1}{a}\right) =$$

$$-\frac{1}{a}, \text{ 由题意可得 } -\frac{1}{a} \geq 1, \text{ 解得 } -1 \leq a <$$

0, 故 $a = -1$.

$$\text{当 } a < 0, \text{ 且 } -\frac{2}{2a} > 1, \text{ 即 } -1 < a < 0 \text{ 时,}$$

在 $x \in (-\infty, 1]$ 上, $f(x)$ 随 x 的增大而增大, 又 $f(1) = a + 2$, 所以 $a + 2 \geq 1$, 解得 $a \geq -1$, 故 $-1 < a < 0$.

综上, a 的取值范围是 $[-1, 0]$. 故 D 正确.

易错警示 不能正确理解分段函数而致错

求解分段函数问题, 必须根据函数的定义域找到每段图象相应的函数解析式, 而对于含参数的分段函数求值问题, 则应根据参数的取值分类讨论.

$$\mathbf{12.} \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2-4x+2, & 0 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{【解析】当 } x \in$$

$[-2, 0]$ 时, 设 $f(x) = kx + b$ ($k > 0$), 将 $(-2, 0), (0, 2)$ 代入函数解析式可得

$$\begin{cases} -2k+b=0, \\ b=2, \end{cases} \text{ 解得 } k=1, b=2, \text{ 即}$$

$$f(x) = x+2;$$

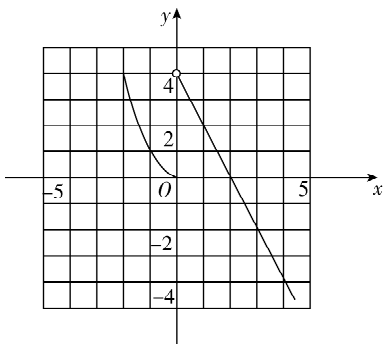
$$\text{当 } x \in (0, 3] \text{ 时, 设 } f(x) = a(x-2)^2 -$$



$2(a>0)$, 将 $(3, -1)$ 代入函数解析式可得 $-1 = a(3-2)^2 - 2$, 解得 $a = 1$, 所以 $f(x) = (x-2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$.

$$\text{综上, } f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq 0, \\ x^2 - 4x + 2, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

13. 【解】 (1) 画出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



(2) 令 $f(x) \geq 2$, 可得 $\begin{cases} x^2 \geq 2, \\ x \leq 0 \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} 4-2x \geq 2, \\ x > 0, \end{cases} \text{ 解得 } x \leq -\sqrt{2} \text{ 或 } 0 < x \leq 1, \text{ 所以}$$

实数 x 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup (0, 1]$.

14. C 【解析】 由离家距离 S 与行走时间 t 之间的函数图象知, 张老师离开家时离家距离逐渐增加, 然后保持不变, 回家时, 离家距离逐渐减少, 特别注意到中途有一段离家距离没变, 所以为圆弧. 故选 C.

15. 【解】 (1) 由题意得 $W(x) = 0.7 \times 1\,000x - R(x) - 250$, 故当 $0 < x < 40$ 时, $W(x) = 700x - 10x^2 - 100x - 250 = -10x^2 + 600x - 250$;

$$\text{当 } x \geq 40 \text{ 时, } W(x) = 700x - 701x - \frac{10\,000}{x} + 9\,450 - 250 = -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200.$$

故 $W(x)$ (单位: 万元) 关于年产量 x (单位: 千部) 的函数解析式为

$$W(x) = \begin{cases} -10x^2 + 600x - 250, & 0 < x < 40, \\ -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200, & x \geq 40. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x < 40$ 时, $W(x) = -10x^2 + 600x - 250 = -10(x-30)^2 + 8\,750$, 故当 $x = 30$ 时, $W(x)$ 取得最大值, 最大值为 8 750 万元;



当 $x \geq 40$ 时, 由基本不等式可知

$$W(x) = -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200 =$$

$$-\left(x + \frac{10\,000}{x}\right) + 9\,200 \leq 9\,200 -$$

$$2\sqrt{x \cdot \frac{10\,000}{x}} = 9\,000 \text{ (万元)}, \text{ 当且仅}$$

当 $x = \frac{10\,000}{x}$, 即 $x = 100$ 时, 等号成立.

因为 $9\,000 > 8\,750$, 所以 2023 年的总年产量为 100 千部时, 企业所获利润最大, 最大利润为 9 000 万元.



能力上分

1. BCD 【解析】 $f(g(1)) = f(3) = 1$,
 $f(g(2)) = f(4) = 2$, $f(g(3)) = f(1) =$
 2 , $f(g(4)) = f(4) = 2$. 故选 BCD.

2. C 【解析】因为 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} =$
 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$, 所以 $f(x) = x^2 + 2$, 所以
 $f(x+1) = (x+1)^2 + 2$, 即 $f(x+1) = x^2 + 2x +$
 3 . 故 C 正确.

3. D 【解析】根据题图可知 $x = 2$ 和 $x = 4$
 不在函数 $f(x)$ 的定义域内,
 因此 $x = 2$ 和 $x = 4$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的
 两根, 可得 $f(x) = \frac{2}{a(x-2)(x-4)}$, 由题图
 可知 $f(3) = 1$, 所以 $a = -2$, 即 $f(x) =$
 $-\frac{1}{(x-2)(x-4)}$, 所以 $f(1) = -\frac{1}{3}$. 故
 选 D.

4. C 【解析】令 $t = f(a)$, 则 $f(t) \leq -1$, 当
 $t < 0$ 时,

→ **关键点** 因为 $f(a)$ 的符号不确定,
 即 t 的符号不确定, 所以必须分类讨论

可得 $-t - 2 \leq -1$, 解得 $t \geq -1$, 所以 $-1 \leq$
 $t < 0$.

当 $t \geq 0$ 时, 可得 $t^2 - 1 \leq -1$, 解得 $t = 0$.

所以 $-1 \leq t \leq 0$, 所以 $-1 \leq f(a) \leq 0$.

当 $a < 0$ 时, 得 $-1 \leq -a - 2 \leq 0$, 解得 $-2 \leq$
 $a \leq -1$.

当 $a \geq 0$ 时, 得 $-1 \leq a^2 - 1 \leq 0$, 解得 $0 \leq$
 $a \leq 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $[-2, -1] \cup [0, 1]$. 故选 C.



5. D 【解析】由题图知小李从点 A 到点 B 的过程中, y 的值先增后减, 从点 B 到点 C 的过程中, y 的值先减后增, 从点 C 到点 D 的过程中, y 的值先增后减, 从点 D 到点 A 的过程中, y 的值先减后增, 所以在整个运动过程中, 小李和小陈之间的距离(即 y 的值)的增减性为增、减、增、减、增, D 选项合乎题意, 故选 D .

6. $f(x) = x^2$ 【解析】 $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$ 中, 令 $x=y=0$,

→ **关键点** 求这种抽象函数的解析式, 常用 0 进行赋值

得 $f(0) = 0$, 令 $y = x$, 得 $f(x-x) = f(x) + f(x) - 2x^2$, 故 $f(x) + f(x) = 2x^2$, 则 $f(x) = x^2$.

7. $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$ 【解析】由 $x-1-\frac{2}{x} \geq 0$, 得 $\frac{(x+1)(x-2)}{x} \geq 0$,

$$\text{则} \begin{cases} x < 0, \\ (x+1)(x-2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} x > 0, \\ (x+1)(x-2) \geq 0, \end{cases}$$

→ **提示**: 在解分式不等式时, 注意分母不能为 0

解得 $-1 \leq x < 0$ 或 $x \geq 2$.

由 $x-1-\frac{2}{x} < 0$, 解得 $x < -1$ 或 $0 < x < 2$.

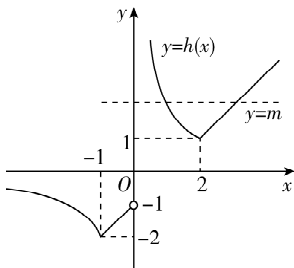
令 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} (x \neq 0)$,

$$\text{则} h(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1, 0) \cup [2, +\infty), \\ \frac{2}{x}, & x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2), \end{cases}$$

在同一平面直角坐标系内作出直线 $y = m$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象如图所示,

→ **关键点** 正确画出函数 $h(x)$ 的图象是求解问题的关键

观察图象知, 当 $-2 < m < -1$ 或 $m > 1$ 时, 直线 $y = m$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象有两个交点, 所以实数 m 的取值范围是 $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$.





8. 【解】(1) 依题意, $f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 + 2 \times (-\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$, $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$, 所以 $f\left(f\left(-\frac{5}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$.

(2) 当 $a \leq -2$ 时, $f(a) = a + 1 = 3$, 解得 $a = 2$, 矛盾;

当 $-2 < a < 2$ 时, $f(a) = a^2 + 2a = 3$, 即 $a^2 + 2a - 3 = 0$, 解得 $a = -3$ 或 $a = 1$, 故 $a = 1$;

当 $a \geq 2$ 时, $f(a) = 2a - 2 = 3$, 解得 $a = \frac{5}{2}$.

所以当 $f(a) = 3$ 时, $a = 1$ 或 $a = \frac{5}{2}$.

(3) 由 $f(m) > m$, 得 $\begin{cases} m \leq -2, \\ m + 1 > m \end{cases}$

或 $\begin{cases} -2 < m < 2, \\ m^2 + 2m > m \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m \geq 2, \\ 2m - 2 > m, \end{cases}$

解得 $m \leq -2$ 或 $-2 < m < -1$ 或 $0 < m < 2$ 或 $m > 2$, 所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

3.1 节测上分

1. D 【解析】若 $f(x) > 0$, 则 $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, 此时需满足 $g(x) < 0$, 即 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, 故 $x \in (1, +\infty)$.

若 $f(x) < 0$, 则 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, 此时需满足 $g(x) > 0$, 即 $x \in (-1, 1)$, 故 $x \in (0, 1)$.

综上所述, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. 故选 D.

2. ACD 【解析】由题意知 $f(6) = 3$, 故 A 正确;

若 $f(x) = 3$, 则 $5 \leq x < 10$, 故 B 错误;

函数的定义域为 $(0, 20]$, 故 C 正确; 函数的值域是 $\{2, 3, 4, 5\}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

3. D 【解析】因为函数 $f(x+2)$ 的定义域为 $(-3, 4)$, 所以 $-3 < x < 4$, 所以 $-1 < x+2 < 6$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 6)$, 对

于函数 $g(x) = \frac{f(x+1)}{\sqrt{3x-1}}$, 需满足

$\begin{cases} -1 < x+1 < 6, \\ 3x-1 > 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3} < x < 5$, 即函数

$g(x) = \frac{f(x+1)}{\sqrt{3x-1}}$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{3}, 5\right)$. 故



选 D.

4. C 【解析】设 $t = \sqrt{1-2x}$ ($t \geq 0$), 则 $x = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$, 则 $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} - t$ ($t \geq 0$), 因此 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - x = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 1$, $x \geq 0$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$. 故选 C.

5. D 【解析】因为 $f(x) + 3f(1-x) = 2x + 3$ ①, 用 $1-x$ 代替①中的 x 得 $f(1-x) + 3f(x) = 2(1-x) + 3 = 5 - 2x$ ②, 所以② \times 3-①得 $8f(x) = 12 - 8x$,

→**提示**: 将①②看成是由 $f(x)$, $f(1-x)$ 作为未知数的方程, 是整体思想的应用
解得 $f(x) = \frac{3}{2} - x$. 故选 D.

快解

在 $f(x) + 3f(1-x) = 2x + 3$ 中,

令 $x = \frac{1}{2}$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 3$, 解得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 对各选项进行验证, 只有选项 D 满足, 故选 D.

6. D 【解析】 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 令 $x = y = 3$, 则 $f(3) + f(3) = f(9)$, 即 $2f(3) = 6$, 可得 $f(3) = 3$;

令 $x = y = \sqrt{3}$, 则 $f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{3}) = f(3)$, 即 $2f(\sqrt{3}) = 3$, 可得 $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$;

令 $x = 3$, $y = \sqrt{3}$, 可得 $f(3\sqrt{3}) = f(3) + f(\sqrt{3}) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. 故 D 正确.

规律点拨

抽象函数求值问题, 一般根据题中所给条件, 赋适当的值即可解决.

7. 【解】(1) 当 $t \leq 0$ 时, $f(t) = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$;

当 $0 < t < 1$ 时, $f(t) = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times t \times \sqrt{3}t = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$;

当 $1 \leq t < 2$ 时, $f(t) = \frac{1}{2} \times (2-t) \times \sqrt{3}(2-t) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{3}$.

综上所述, $f(t) =$

$$\begin{cases} \sqrt{3}, t \leq 0, \\ \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2, 0 < t < 1, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{3}, 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

(2) 由(1)知, 若 $0 < m < 1$, 则 $f(m) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}m^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $m = 1$ (舍去) 或 $m = -1$ (舍去);

若 $1 \leq m < 2$, 则 $f(m) = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 - 4m + 4) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $m = 3$ (舍去) 或 $m = 1$.

$$\therefore 2a + b = 1, \frac{b}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{a} + \frac{2a+b}{b} = \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} + 1.$$

$\because a, b$ 都是正实数, $\therefore \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq$

$$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{a} = \frac{2a}{b}, \text{ 即}$$

$$a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}-1 \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{1}{b} \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2} + 1.$$

3.2 函数的基本性质

3.2.1 单调性与最大(小)值

课时1 函数的单调性



1. B 【解析】对于①, 若任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立, 则函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 故①为假命题;

对于②, 由减函数的定义知, 若任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立, 则 $f(x)$ 为减函数, 所以若存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 成立, 则函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不可能是减函数, 故②为真命题;

对于③, 由于 $x_2 > 0$, 则 $x_1 + x_2 > x_1$, 结合 $f(x_1) < f(x_1 + x_2)$ 可知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不可能是减函数, 故③为假命题.

所以真命题的个数为 1, 故 B 正确.



2. D



攻略上分

四个选项中的函数解析式均由基本初等函数构成,因此考虑根据基本初等函数的性质判断函数单调性.

【解析】在 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x) = x$ 单调递增, $f(x) = -\frac{1}{x}$ 单调递增.

→ **关键点** 掌握基本初等函数的单调性是解题的关键

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = |x| = -x$ 单调递减. 故选 D.

3. AB



攻略上分

本题没有给出具体的解析式, 有 x_1, x_2 与 $f(x_1), f(x_2)$ 及相关符号, 因此考虑利用“定义法”判断函数单调性.

【解析】对于 A, 由题意可知, 当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增, 故 A 符合题意;

对于 B, 因为对任意的 $x_1, x_2 \in (a,$

$b), x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 恒成立,

所以 $\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) > 0, \\ x_1 - x_2 > 0 \end{cases}$

或 $\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) < 0, \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases}$ 恒成立,

即 $\begin{cases} x_1 > x_2, \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 < x_2, \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 故 B 符合题意;

对于 C, 例如 $f(x) = x^2$, 当 $x \in (-2, 4)$ 时,

$-1 < 3$, 且 $\frac{f(-1) - f(3)}{-1 - 3} = \frac{1 - 9}{-4} = 2 > 0$, 但函

数 $f(x) = x^2$ 在 $(-2, 4)$ 上不是单调递增的, 而是先减后增的, 故 C 不符合题意;

对于 D, 由选项 B 可知 $f(x)$ 在 $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$,

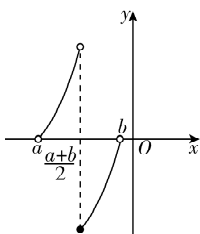
$\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ 上单调递增,

如图, 满足 $f(x)$ 在 $\left(a, \frac{a+b}{2}\right), \left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ 上

单调递增,

但 $f(x)$ 在 (a, b) 上不单调,

→ **关键点** 只有当函数 $y=f(x)$ 在每个区间单调递增且图象连续时, 函数才在整个区间上单调递增



故 D 不符合题意. 故选 AB.

易错警示

函数不是定义域上的单调增(减)函数时, 往往仍有可能在其定义域的某个子区间上单调. 如“ $y = \frac{1}{x}$ ”不是定义域上的减函数, 但却是在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递减, 所以在整个定义域上不具有单调性的函数, 有可能在其定义域的某个子区间上具有单调性. 反之, 在函数定义域的某个子区间上具有单调性的函数, 未必在其整个定义域上具有单调性.

4. (1) 【解】由已知可得 $f(2) = \frac{2}{2^2+4} =$

$$\frac{1}{4}, f(f(2)) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4} = \frac{4}{65}.$$

(2) 【证明】任取 x_1, x_2 , 且 $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+4} - \frac{x_2}{x_2^2+4}$$

$$= \frac{x_1(x_2^2+4) - x_2(x_1^2+4)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(4 - x_1x_2)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}.$$

$$\because -2 \leq x_1 < x_2 \leq 2, \therefore x_1 - x_2 < 0, x_1x_2 < 4,$$

$$\therefore 4 - x_1x_2 > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2), \therefore \text{函数 } f(x) \text{ 在 } [-2, 2] \text{ 上单调递增.}$$

5. C



攻略上分

由于题中给出了函数图象, 因此利用“图象法”判断函数的单调性, 确定单调递减区间.

【解析】根据函数图象可知, $f(x)$ 的单调



递减区间为 $[-1, 0)$ 和 $[1, +\infty)$. 结合选项可知 C 正确.

易错警示 多个单调区间之间的表示 出错

一个函数出现两个或两个以上单调递增(或递减)区间时,单调递增(或递减)区间之间用“,”隔开,或者用“和”连接,不能用“ \cup ”或“且”连接. 如:函数 $y = \frac{1}{x}$, 其单调递减区间在书写时应写成“ $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ ”或“ $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ ”,而不能写成“ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ”. 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 中任取 $x_1 < x_2$, 不一定有 $f(x_1) > f(x_2)$, 不满足单调递减的定义.

6. A



攻略上分

函数 $f(x) =$

$\sqrt{-x^2+4x}$ 为复合函数, 因此利用“性质法”判断函数的单调性.

【解析】 $\because -x^2+4x \geq 0, \therefore 0 \leq x \leq 4$.

\because 函数 $y = -x^2+4x$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 4)$ 上单调递减, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 4)$ 上单调递减. 故选 A.

7. A 【解析】函数 $f(x) = (1-x) \cdot |2-x| =$

$$\begin{cases} x^2-3x+2, & x < 2, \\ -x^2+3x-2, & x \geq 2. \end{cases} \quad \text{当 } x \geq 2 \text{ 时,}$$

$f(x) = -x^2+3x-2$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减; 当 $x < 2$ 时, $f(x) = x^2-3x+2$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{3}{2}, 2)$ 上单调递增. 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{3}{2}, 2)$, 故选 A.

8. $[0, 3]$ 【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-9, 9]$, 所以函数 $y = f(x^2)$ 的定义域满足 $-9 \leq x^2 \leq 9$, 即 $x \in [-3, 3]$.

令 $t = x^2$, $t = x^2$ 在 $[0, 3]$ 上单调递增, 在 $[-3, 0)$ 上单调递减.

又 $y = f(x)$ 在定义域上单调递增, 所以函数 $y = f(x^2)$ 的单调递增区间为 $[0, 3]$.

9. $(-1, 1), (1, 3)$ 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.



$$\text{函数 } f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} =$$

$$\frac{(x-1)^2+2(x-1)+4}{x-1} = (x-1) + \frac{4}{x-1} + 2,$$

$$\text{设 } x-1=t(t \neq 0), g(t) = t + \frac{4}{t} + 2,$$

提示: 在利用换元法解题的时候, 要注意换元后新变量的取值范围

因为 $g(t)$ 在 $(-2, 0)$ 和 $(0, 2)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 1), (1, 3)$.

提示: 求出构造函数的单调区间后, 注意还原到已知函数中

关键点拨 本题求分子为二次式, 分

母为一次式的分式函数 $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

的单调区间, 解题关键是将解析式转

化为 $f(x) = px + q + \frac{m}{dx+e}$ 的形式, 然后

结合基本不等式或函数性质等求解.

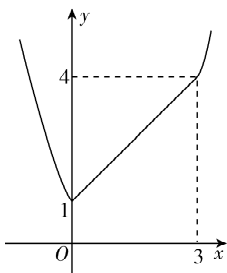
10. 【解】 (1) 解析法: 由 $x+1 \leq (x-1)^2$, 即 $x^2-3x \geq 0$, 解得 $x \leq 0$ 或 $x \geq 3$.

由 $x+1 > (x-1)^2$, 得 $0 < x < 3$.

所以 $M(x) =$

$$\begin{cases} x+1, & x \in (0, 3), \\ (x-1)^2, & x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty). \end{cases}$$

图象法: 函数 $M(x)$ 的图象如图所示.



(2) 由(1)中图象知, 函数 $M(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 0]$, 单调递增区间是 $(0, +\infty)$, 当 $x=0$ 时, 函数 $M(x)$ 取得最小值 1, 无最大值.

11. B



攻略上分

由 $|f(x)| > 1$ 并结合函数 $f(x)$ 的单调性, 可以“去 f ”转化为一元不等式求解.

【解析】 由 $|f(x)| > 1$, 得 $f(x) > 1$ 或 $f(x) < -1$, 则 $f(x) > f(-1)$ 或 $f(x) < f(3)$.

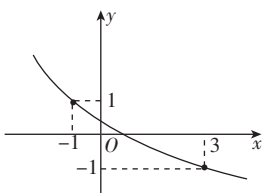
又因为函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所



以可得 $x > 3$ 或 $x < -1$, 即 $|f(x)| > 1$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, 故选 B.

一题多解 由题意可画出函数 $f(x)$ 的简图, 如图所示.

因为 $|f(x)| > 1$ 等价于 $f(x) > 1$ 或 $f(x) < -1$, 所以由 $f(x)$ 的简图可知 $|f(x)| > 1$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, 故选 B.



12. C 【解析】当 $a = 0$ 时, $f(x) = x - 1$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为

直线 $x = -\frac{1}{2a}$, 由题意得 $\begin{cases} a > 0, \\ -\frac{1}{2a} \leq -2, \end{cases}$ 解得

$$0 < a \leq \frac{1}{4}.$$

综上, a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. 故 C 正确.

一题多解 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x - 1$, 其在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 故排除 BD; 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -x^2 + x - 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$, 其在 $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 故排除 A. 故选 C.

易错警示 解决含参函数的单调性问题时忽略对参数的分类讨论而致错

对于求解形如 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的函数的单调性问题, 由于 a 的值不确定, 因此函数不一定是二次函数, 要对 a 的取值进行分类讨论. 本题中的易错之处是忽视二次项系数为 0 的情况.

13. C 【解析】对于 A, $\because y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的减函数, $a \neq 0$, $\therefore a$ 与 $2a$ 的大小关系不能确定, 从而 $f(a), f(2a)$ 的大小

提示: 当 $a > 0$ 时, $a < 2a$; 当 $a < 0$ 时, $a > 2a$



关系不确定,故 A 错误;

对于 B, $a^2 - a = a(a - 1)$, 当 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时, $a^2 > a$, 当 $0 < a < 1$ 时, $a^2 < a$, 故 $f(a^2), f(a)$ 的大小关系不确定, 故 B 错误;

对于 C, $\because a^2 + a - a = a^2 > 0, \therefore a^2 + a > a$, $\therefore f(a^2 + a) < f(a)$, 故 C 正确;

对于 D, $a^2 + a - a - 1 = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$, 当 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时, $a^2 + a > a + 1$, 当 $-1 < a < 0$ 或 $0 < a < 1$ 时, $a^2 + a < a + 1$, 故 $f(a^2 + a), f(a + 1)$ 的大小关系不确定, 故 D 错误. 故选 C.

14. B



攻略上分

待求解的不等式为“标准形式”, 因此考虑利用“去 f ”的方法求解.

【解析】 因为对任意两个不相等的实数 a, b , 都有 $(a - b)[f(b) - f(a)] > 0$, 所以 $a - b$ 与 $f(a) - f(b)$ 异号, 故 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 所以不等式 $f(3x - 1) < f(x + 5)$ 等价于 $3x - 1 > x + 5$, 解得 $x > 3$, 故选 B.

15. C **【解析】** 根据题意, 函数 $f(x) =$

$$\frac{ax - 1}{x - a} = \frac{a(x - a) + a^2 - 1}{x - a} = \frac{a^2 - 1}{x - a} + a.$$

若 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 则必有

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ a \leq 2, \end{cases} \text{ 解得 } a < -1 \text{ 或 } 1 < a \leq 2, \text{ 即}$$

a 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (1, 2]$. 故 C 正确.

16. A **【解析】** 因为对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$

$(x_1 \neq x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 所

以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

$$\text{则} \begin{cases} -a - 5 < 0, \\ -(a - 1) \geq 2, \\ 2^2 + 2(a - 1) \times 2 - 3a \geq (-a - 5) \times 2 - 2, \end{cases}$$

解得 $-4 \leq a \leq -1$. 故选 A.

17.



攻略上分

由于本题涉及抽象函数, 故考虑利用赋值法求解(1), 进而判断单调性, 再利用“去 f ”的方法解不等式求解(3).

(1) **【证明】** 令 $x = y = 1$, 则 $f(1) = f(1) + f(1)$, 所以 $f(1) = 0$.

当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > 1$, 则 $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.



在 $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $y = \frac{1}{x}$,

则 $f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, 所以 $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.

(2) 【解】设 $0 < x_1 < x_2$, 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 所以

$$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0.$$

于是 $f(x_2) = f\left(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}\right) = f(x_1) +$

$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > f(x_1)$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 【解】 $f(x+1) + f(2x-3) > 0$ 等价于 $f((x+1)(2x-3)) > f(1)$.

由(2)知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $(x+1)(2x-3) > 1$, 且 $x+1 > 0, 2x-3 >$

0 , 解得 $x > \frac{1+\sqrt{33}}{4}$.

故所求不等式的解集

是 $\left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$.

18. 【解】(1) $f(x) = \sqrt{x-k}$ 在 $[k, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为

$$\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right], \therefore f(a) = \frac{a}{2}, f(b) = \frac{b}{2}.$$

\therefore 方程 $\sqrt{x-k} = \frac{x}{2}$ 有两个不相等的实根, 则 $x \geq k$, 且 $x \geq 0$,

\therefore 方程 $x^2 - 4x + 4k = 0$ 在 $[k, +\infty) \cap [0, +\infty)$ 上有两个不相等的实根,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (-4)^2 - 4 \times 4k > 0, \\ 2 > k, \\ k^2 - 4k + 4k \geq 0, \\ 4k \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 \leq k < 1,$$

$\therefore k$ 的取值范围是 $[0, 1)$.

(2) 由题意知 $k=0, f(x) = \sqrt{x}$.

由 $f(x^2 - 4x - 12) < -x^2 + 4x + 24$,

得 $\sqrt{x^2 - 4x - 12} < -x^2 + 4x + 24$, 整理得

$$\sqrt{x^2 - 4x - 12} + x^2 - 4x - 12 < 12.$$

设函数 $g(x) = \sqrt{x} + x$, 则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 注意到 $g(9) = 12$,

$\therefore \sqrt{x^2 - 4x - 12} + x^2 - 4x - 12 < 12$ 等价于



$$0 \leq x^2 - 4x - 12 < 9.$$

由 $x^2 - 4x - 12 \geq 0$, 解得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$.

由 $x^2 - 4x - 12 < 9$, 解得 $-3 < x < 7$,

\therefore 原不等式的解集为 $(-3, -2] \cup [6, 7)$.

课时2 函数的最大(小)值



对点上分

- 1. B** 【解析】函数 $y = \frac{1}{x+3}$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上单调递减, 即当 $x = 1$ 时, y 取得最小值, 且最小值为 $\frac{1}{4}$. 故 B 正确.

2. C



攻略上分

函数的解析式主要由未知数 x 的一次式构成, 因此可考虑利用单调性求值域三部曲来解.

【解析】函数 $f(x) = x + \sqrt{2x-3}$ 的定义域为 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, 由 $y = x$ 和 $y = \sqrt{2x-3}$ 在 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上均单调递增, 可得 $f(x) = x + \sqrt{2x-3}$ 在 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 有最小值 $\frac{3}{2}$, 无最大值. 故 C 正确.

易错警示

求函数值域时, 忽略函数的定义域而致错

求函数的值域, 首先是求函数的定义域, 再判断函数的单调性, 再利用这两个条件求解值域.

- 3. C** 【解析】因为 $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$, $-2 \leq x \leq 3$,

令 $t = x + 1$, 则 $-1 \leq t \leq 4$,

$$\text{所以 } z = \frac{y-3}{x+1} = \frac{\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3}{x+1} = \frac{x-18}{5(x+1)} =$$

$$\frac{x+1-19}{5(x+1)} = \frac{1}{5} - \frac{19}{5t}, \text{ 显然 } t \neq 0,$$

所以当 $-1 \leq t < 0$ 时, $z = \frac{1}{5} - \frac{19}{5t}$ 单调递增,

所以 $z_{\min} = \frac{1}{5} + \frac{19}{5} = 4$, 故 $\frac{y-3}{x+1} \in [4,$

$+\infty)$, 当 $0 < t \leq 4$, $z = \frac{1}{5} - \frac{19}{5t}$ 单调递增, 所

以 $z_{\max} = \frac{1}{5} - \frac{19}{20} = -\frac{3}{4}$, 故 $\frac{y-3}{x+1} \in$



$$\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right].$$

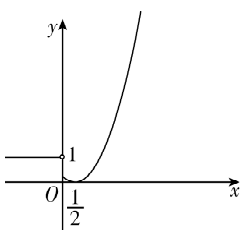
综上, $\frac{y-3}{x+1} \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup [4, +\infty)$.

故选 C.

4. (1) 0 (2) $\left[0, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right]$

【解析】(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) =$

$$\begin{cases} 1, & x < 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{其图象如图所示.}$$



\therefore 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 0.

(2) 由(1)知当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 0, 符合题意;

若 $a < 0$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递增, 当 x 趋近于 $-\infty$ 时, $f(x)$ 趋近于 $-\infty$, 此时没有最小值;

若 $a > 0$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递减, 此时 $f(x) > -a^2 + 1$,

$$\text{当 } x \geq a \text{ 时, } f(x)_{\min} = \begin{cases} 0, & 0 < a < \frac{1}{2}, \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2, & a \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2}, \\ -a^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \geq \frac{1}{2}, \\ -a^2 + 1 \geq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 0 < a \leq \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right]$.

5. 【解】由题意, 得 $S_{\triangle AEH} = S_{\triangle CFG} = \frac{1}{2}x^2$,

$$S_{\triangle BEF} = S_{\triangle DGH} = \frac{1}{2}(a-x)(2-x),$$

$$\text{所以 } y = S_{\text{矩形}ABCD} - 2S_{\triangle AEH} - 2S_{\triangle BEF} =$$

$$-2x^2 + (a+2)x, \text{ 又因为 } \begin{cases} x > 0, \\ a-x > 0, \\ 2-x \geq 0, \\ a > 2, \end{cases}$$



所以 $0 < x \leq 2$, 故 $y = -2x^2 + (a+2)x$ 的定义域为 $(0, 2]$.

因为 $y = -2x^2 + (a+2)x = -2 \left(x - \frac{a+2}{4} \right)^2 + \frac{(a+2)^2}{8}$.

由于 $2 < a < 6$, 故 $1 < \frac{a+2}{4} < 2$, 所以函数 $y = -2x^2 + (a+2)x$ 在 $\left(0, \frac{a+2}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{a+2}{4}, 2\right]$ 上单调递减,

所以当 $x = \frac{a+2}{4}$ 时, $y_{\max} = \frac{(a+2)^2}{8}$.

6. AB 【解析】记 $y = f(x) = ax + 1$, 由题知 $a \neq 0$.

当 $a > 0$ 时, $f(x) = ax + 1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 则 $f(2) - f(1) = (2a + 1) - (a + 1) = 2$, 解得 $a = 2$;

当 $a < 0$ 时, $f(x) = ax + 1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 则 $f(1) - f(2) = (a + 1) - (2a + 1) = 2$, 解得 $a = -2$.

综上, $a = \pm 2$. 故 AB 正确.

易错警示 已知最值求参数的取值(范围)时忽略对参数进行分类讨论而致错


涉及函数 $f(x) = \frac{k}{x}$ 或 $f(x) = kx + b$ ($k \neq 0$) 的单调性或最值时, 若 k 的

值不确定, 则必须对 k 进行分类讨论. 本题易错之处是忽视对系数的讨论而认为函数是增函数或减函数中的一种.

7. D 【解析】记 $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$, 因为 $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$, 所以当 $x = 1$ 时, 函数取得最小值 2.

因为 $f(0) = f(2) = 3$, 而函数在闭区间 $[0, m]$ 上有最大值 3, 最小值 2, 所以 $1 \leq m \leq 2$, 故选 D.


8. A 【解析】 $f(x) = \frac{x+a}{x+1} = 1 + \frac{a-1}{x+1}$, 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 1$, 不符合题意;

 **提示:** 由于 a 的取值范围对函数的单调性有影响, 故需分类讨论

当 $a - 1 > 0$, 即 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, $f(x)_{\max} = f(0) = a = 3$, 符合题意;



当 $a-1 < 0$, 即 $a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{a+1}{2} = 3$, 解得 $a = 5$, 与 $a < 1$ 矛盾, 舍去.

 **易错:** 解出 a 的值后, 未考虑大前提, 从而错选 D

综上所述, $a = 3$. 故选 A.

9. B 【解析】 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} + t, & x > 0, \\ x^2 + 2tx + t^2, & x \leq 0, \end{cases}$

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} + t \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} +$

$t = 2 + t$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时, 等号

成立;

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2tx + t^2 = (x+t)^2$, 要使 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 只需 $f(x) = x^2 + 2tx + t^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 且 $2+t \geq$

$$f(0) = t^2, \text{ 即 } \begin{cases} -t \geq 0, \\ t^2 - t - 2 \leq 0, \end{cases} \text{ 解得 } -1 \leq t \leq 0.$$

故 B 正确.

10. [2, 4]



攻略上分

本题函数的解析式中虽然含有绝对值, 但其单调性易判断, 因此考虑利用单调性求值域三部曲求解.

【解析】 因为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[0, 2]$, 所以当 $a \geq 2$ 时, $f(x) = |x - 2| = x - 2$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 值域为 $[a - 2, b - 2]$, 所以 $a - 2 = 0, b - 2 = 2$, 解得 $a = 2, b = 4$, 所以 $b - a = 2$.

当 $b \leq 2$ 时, $f(x) = |x - 2| = 2 - x$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递减, 值域为 $[2 - b, 2 - a]$, 则 $2 - a = 2, 2 - b = 0$, 解得 $a = 0, b = 2$, 所以 $b - a = 2$.

当 $a < 2 < b$ 时, $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} 2 - x, & a \leq x < 2, \\ x - 2, & 2 \leq x \leq b, \end{cases}$ 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, 2)$

上单调递减, 在区间 $[2, b]$ 上单调递增, 故值域为 $[0, 2 - a]$ 或 $[0, b - 2]$.

若 $\begin{cases} 2 - a = 2, \\ 0 < b - 2 \leq 2, \end{cases}$ 则 $2 < b - a \leq 4$;

若 $\begin{cases} b - 2 = 2, \\ 0 < 2 - a \leq 2, \end{cases}$ 则 $2 < b - a \leq 4$.

综上, $b - a$ 的取值范围为 $[2, 4]$.



11. 【解】(1) 由题意知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 的

图象经过点 $A(1, 3), B(2, 0)$,

$$\text{故} \begin{cases} a+b=3, \\ 2a+\frac{b}{2}=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ b=4, \end{cases}$$

$$\text{故} f(x) = -x + \frac{4}{x}.$$

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则} f(x_1) - f(x_2) = -x_1 + \frac{4}{x_1} -$$

$$\left(-x_2 + \frac{4}{x_2}\right) = (x_2 - x_1) + \frac{4(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} =$$

$$(x_2 - x_1) \times \frac{x_1 x_2 + 4}{x_1 x_2},$$

→ **关键点** 在用定义法证明单调性时, 一般会将因式做有利于判断符号的变形, 可见攻略册 P38

因为 $x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 > 0$, 所以 $(x_2 - x_1) \times \frac{x_1 x_2 + 4}{x_1 x_2} > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 故函数 $f(x)$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 由(2)知 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, m\right]$ 上单调递

减, 因此 $f(x)_{\min} = f(m) = -m + \frac{4}{m} = 3$, 解

得 $m = 1$ 或 $m = -4$.

又 $m > \frac{1}{2}$, 所以 $m = 1$.

12. B 【解析】由于 $x > \frac{2a+1}{a-1}$ 对任意的

$x \in [1, 2]$ 恒成立, 而函数 $y = x$ 在 $[1,$

$2]$ 上单调递增, 其最小值为 1, 故 $\frac{2a+1}{a-1} <$

1, 进而 $\frac{2a+1}{a-1} - 1 < 0$,

→ **提示**: 在解分式方程、不等式时, 如果直接将分子、分母交叉相乘, 可能会导致分母为零的情况出现, 故只能移项通分

即 $\frac{a+2}{a-1} < 0$, 解得 $-2 < a < 1$, 故选 B.

13. C



攻略上分

本题中的不等式能

成立问题可转化求函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的最

值来解决.



【解析】因为 $x \in [1, 2]$, 所以不等式

$a \leq x + \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上有解, 则只需 $a \leq$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)_{\max}$, 又函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $[1,$

$2]$ 上单调递增, 所以当 $x = 2$ 时, $y = x +$

$\frac{1}{x}$ 取得最大值, 则 $\left(x + \frac{1}{x}\right)_{\max} = 2 +$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, 所以 $a \leq \frac{5}{2}$, 故 C 正确.

关键点拨

求解二次函数不等式在闭区间上的能成立问题, 可以运用分离参数法、讨论法、数形结合法以及最值法等多种方法. 在具体求解过程中, 要根据不等式的具体形式和闭区间的特点来选择合适的方法, 并灵活运用二次函数的性质来求解参数的范围.

14. D 【解析】由题意, 对任意的 $x_1 \in$

$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$, 存在 $x_0 \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$, 使得

$g(x_1) = f(x_0)$ 等价于函数 $g(x)$ 在

$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上的值域是 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上

的值域的子集.

又 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 由对勾函数的性质, 易

知 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上单调递减, 在 $[1,$

$3]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上

的最小值 $f(x)_{\min} = f(1) = 2$.

又 $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) = \frac{10}{3}$, 所以当 $x \in$

$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 时, $f(x)_{\max} = \frac{10}{3}$, 则 $f(x)$ 的值域

为 $\left[2, \frac{10}{3}\right]$.

又 $g(x) = mx + 3$, 当 $m > 0$ 时, $g(x)$ 为增

函数, 故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上的值域为

$\left[\frac{m}{3} + 3, 3m + 3\right]$,

则有 $\begin{cases} \frac{m}{3} + 3 \geq 2, \\ 3m + 3 \leq \frac{10}{3}, \\ \frac{m}{3} + 3 \leq 3m + 3, \end{cases}$ 解得 $0 < m \leq \frac{1}{9}$;



当 $m < 0$ 时, $g(x)$ 为减函数, 故 $g(x)$ 在

$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 上的值域为 $\left[3m+3, \frac{m}{3}+3\right]$,

$$\text{则有} \begin{cases} 3m+3 \geq 2, \\ \frac{m}{3}+3 \leq \frac{10}{3}, \\ 3m+3 \leq \frac{m}{3}+3, \end{cases} \quad \text{解得} -\frac{1}{3} \leq m < 0;$$

当 $m = 0$ 时, $g(x) = 3$, 满足题意.

综上所述, m 的取值范围是

$$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right].$$

故选 D.

15. BC 【解析】由已知可得当 $x_1, x_2 \in$

$(-\infty, 0)$ 时, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f(2ax) = f(|2ax|) < f(2x^2+1)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则可得 $|2ax| < 2x^2+1$.

当 $x = 0$ 时, 不等式为 $0 < 1$, 显然成立.

当 $x \neq 0$ 时, 原不等式可化为 $|a| < \frac{1}{2} \times$

$\frac{2x^2+1}{|x|}$ 恒成立, 则只需要 $|a| < \left(\frac{1}{2} \times$

$\frac{2x^2+1}{|x|}\right)_{\min}$ 即可.

因为 $\frac{1}{2} \times \frac{2x^2+1}{|x|} = \frac{1}{2} \left(2|x| + \frac{1}{|x|}\right) \geq$

$\frac{1}{2} \times 2 \sqrt{2|x| \cdot \frac{1}{|x|}} = \sqrt{2}$, 当且仅当

$2|x| = \frac{1}{|x|}$, 即 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 所

以 $|a| < \sqrt{2}$, 解得 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 故 BC 正确.

16. $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 【解析】令 $t = \sqrt{x}$, $t \in [0,$

$\sqrt{6}]$, \therefore 当 $x \in [0, 6]$ 时, $f(x) \geq 1$ 恒成

立, \therefore 当 $t \in [0, \sqrt{6}]$ 时, $t^2 - 4t + 2m \geq 1$ 恒

成立, 即 $2m \geq -t^2 + 4t + 1$ 恒成立.

$\therefore -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$, $t \in [0, \sqrt{6}]$,

\therefore 当 $t = 2$ 时, $-t^2 + 4t + 1$ 取得最大值 5,

$\therefore 2m \geq 5$, 解得 $m \geq \frac{5}{2}$.

\therefore 实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.



17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】因为对 $\forall x \in (0, +\infty)$,

$$\left(\frac{1}{x} - a\right)(x^2 - ax - 1) \leq 0, \text{ 即 } \left(\frac{1}{x} - a\right)\left(x - a - \frac{1}{x}\right) \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

且 $y_1 = \frac{1}{x} - a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$y_2 = x - a - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以若要满足不等式恒成立, 则函数 y_1 ,

y_2 的图象必须交于 x 轴正半轴上一点, 否则必存在 $x_0 > 0$, 使得

$$\left(\frac{1}{x} - a\right)\left(x - a - \frac{1}{x}\right) > 0, \text{ 所以当 } \frac{1}{x} - a = 0, \text{ 即 } x = \frac{1}{a},$$

且 $x - a - \frac{1}{x} = 0$ 时, 原不等式恒成立, 所以

$$\frac{1}{a} - 2a = 0 \text{ 且 } a > 0, \text{ 所以 } a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. 【解】(1) 若 $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $g(x) \leq 0$ 成立, 则只需 $\Delta = 4 - 4k \geq 0$, 解得 $k \leq 1$.

故 k 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

(2) 若 $\forall x \in [-1, 2], f(x) > 0$ 恒成立,

$$\text{则 } \begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(2) > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < m < 1, \text{ 又 } m \neq 0,$$

故 m 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, 1)$.

(3) 当 $k = 3$ 时, $g(x) = x^2 + 2x + 3$,

若 $\forall x_1 \in [1, 2], \exists x_2 \in [-1, 2]$, 满足 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则只需 $\forall x_1 \in [1, 2]$, 有 $f(x_1) \leq g(x_2)_{\max}$,

当 $x_2 \in [-1, 2]$ 时, $g(x_2)_{\max} = g(2) = 11$, 故 $\forall x_1 \in [1, 2]$, 有 $f(x_1) \leq 11$,

$$\text{则有 } \begin{cases} f(1) \leq 11, \\ f(2) \leq 11, \end{cases} \text{ 解得 } m < 0 \text{ 或 } 0 < m \leq 5,$$

所以 m 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 5]$.

19. 【解】由 $f(4) = 8, f(-1) = \frac{1}{2}$, 得

$$\begin{cases} \frac{4a}{4+b} = 8, \\ \frac{-a}{-1+b} = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a = 8 + 2b, \\ 2a = 1 - b, \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = -3$, 所以 $f(x) = \frac{2x}{x-3} =$

$$\frac{2x-6+6}{x-3} = 2 + \frac{6}{x-3},$$



$$\text{当 } x \in \left[\frac{7}{2}, \frac{17}{4} \right] \text{ 时, } f(x) - \frac{3}{2x-9} = 2 + 9 \times \frac{x-5}{2x^2-15x+27}.$$

$$\text{令 } x-5=t, \text{ 则 } t \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4} \right], x=t+5,$$

$$\text{则 } f(x) - \frac{3}{2x-9} = 2 + \frac{9t}{2t^2+5t+2} = 2 + \frac{9}{2t + \frac{2}{t} + 5}.$$

由对勾函数的性质易知, $y = 2t + \frac{2}{t}$ 在

$\left[-\frac{3}{2}, -1 \right)$ 单调递增, 在 $\left(-1, -\frac{3}{4} \right]$ 上

单调递减, 则 $y = 2t + \frac{2}{t} \in \left[-\frac{13}{3}, -4 \right],$

$$\text{所以 } f(x) - \frac{3}{2x-9} = 2 + \frac{9}{2t + \frac{2}{t} + 5} \in$$

$$\left[11, \frac{31}{2} \right], \text{ 则对任意的 } x \in \left[\frac{7}{2}, \frac{17}{4} \right], f(x) \geq \frac{3}{2x-9} + 4m^2 + 7m \text{ 可转化为}$$

$$11 \geq 4m^2 + 7m, \text{ 即 } (4m+11)(m-1) \leq 0,$$

$$\text{解得 } -\frac{11}{4} \leq m \leq 1.$$

$$\text{所以 } m \text{ 的取值范围为 } \left[-\frac{11}{4}, 1 \right].$$



能力上分

1. B 【解析】由题意得 $-x^2 + 8x > 0$, 解得

$$0 < x < 8, \text{ 故 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+8x}} \text{ 的定义域}$$

为 $(0, 8)$.

由于 $y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 结合

复合函数的单调性, 故只需求解 $t = -x^2 +$

$8x$ 在 $(0, 8)$ 上的单调递增区间. 函数

$t = -x^2 + 8x$ 的图象开口向下, 对称轴为直线 $x = 4$, 故区间 $(0, 4)$ 即为所求, 故选 B.

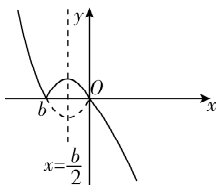
2. B 【解析】 $f(x) = -x |x - b| =$

$$\begin{cases} -x^2 + bx, & x \geq b, \\ x^2 - bx, & x < b. \end{cases} \text{ 令 } f(x) = 0, \text{ 得 } x = 0$$

或 $x = b$.

①若 $b < 0$, 作出 $f(x)$ 的图象如图①所示,

由图可知, 函数 $f(x) = -x |x - b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递减, 不符合题意;

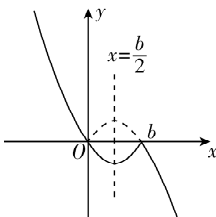


图①

②若 $b = 0$, 则 $f(x) = -x|x| = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ 为 \mathbf{R} 上的减函数, 不符合题意;

③若 $b > 0$, 作出 $f(x)$ 的图象如图②所示, 由图可得 $f(x)$ 在 $[b, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \frac{b}{2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{b}{2}, b]$ 上单调递增, 若 $f(x) = -x|x-b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递增, 则 $\frac{b}{2} \leq 2 < 3 \leq b$, 解得 $3 \leq b \leq 4$.

故 B 正确.



图②

一题多解

函数 $f(x) = -x|x-b|$

$$b| = \begin{cases} -x^2 + bx, & x \geq b, \\ x^2 - bx, & x < b. \end{cases}$$

由于 $f(x) = -x|x-b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递增, 所以 $f(2) < f(3)$, 故 $2|2-b| > 3|3-b|$, 平方并整理后可得 $5b^2 - 38b + 65 < 0$, 解得 $\frac{13}{5} < b < 5$.

当 $x \geq b$ 时, 函数 $f(x) = -x^2 + bx$, 图象开口向下, 关于直线 $x = \frac{b}{2}$ 对称, 由于 $b > \frac{b}{2}$, 所以 $f(x)$ 在 $[b, +\infty)$ 上单调递减; 当 $x < b$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - bx$, 图象开口向上, 关于直线 $x = \frac{b}{2}$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{b}{2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{b}{2}, b]$ 上单调递增.



若 $f(x) = -x|x-b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单

调递增, 则有 $\begin{cases} \frac{b}{2} \leq 2, \\ b \geq 3, \end{cases}$ 解得 $3 \leq b \leq 4$,

故选 B.

3. A 【解析】令 $2x+1=t$, 因为 $x \in [0, 1]$,

所以 $t \in [1, 3]$, $x = \frac{t-1}{2}$, 所以原不等式等

价于 $\frac{t^2-t+2}{2t} > a$ 在 $t \in [1, 3]$ 上恒成立.

令 $f(t) = \frac{t^2-t+2}{2t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{2}{t} - 1 \right)$, $f(t)$

在 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{2}, 3]$ 上单调

递增, 所以当 $t = \sqrt{2}$ 时, $f(t)_{\min} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$,

若 $f(t) > a$ 在 $t \in [1, 3]$ 上恒成立,

则 $f(t)_{\min} > a$, 所以 $a < \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. 故选 A.

4. B 【解析】由条件得 $\forall x_1, x_2 \in (0,$

$$+\infty), \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{x_2 - x_1} > 0,$$

提示: 通过不等式两边同时除以 $x_1 x_2$ 转化函数结构

$\therefore \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由 $f(a^2+2a) > 2a^2+4a$, 得 $\frac{f(a^2+2a)}{a^2+2a} > 2 =$

$\frac{f(3)}{3}$, 则 $\begin{cases} a^2+2a > 0, \\ a^2+2a > 3, \end{cases}$ 解得 $a < -3$ 或 $a > 1$,

故选 B.

5. ABD 【解析】对于 A, $\because \forall x, y \in \mathbf{R}$, 都

有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, \therefore 令 $x=y=0$,

可得 $f(0) = 2f(0) - 1$, $\therefore f(0) = 1$, 故 A

正确;

对于 B, 令 $y=x$, 可得 $f(2x) = 2f(x) - 1$,

令 $y=2x$, 可得 $f(3x) = f(x) + f(2x) - 1 =$

$3f(x) - 2$, 同理可得 $f(4x) = 4f(x) -$

3 , $f(5x) = 5f(x) - 4$, $f(6x) = 6f(x) - 5$, 故

B 正确;

对于 C, 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$x_2 - x_1 > 0$, $\therefore f(x_2 - x_1) < 1$, $\therefore f(x_2) =$

$f(x_2 - x_1 + x_1) = f(x_2 - x_1) + f(x_1) - 1 <$

$1 + f(x_1) - 1 = f(x_1)$, $\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调

递减, $\therefore f(x)$ 在区间 $[-4, 4]$ 上的最大值为

$f(-4)$, 在 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ 中,



令 $y = -x$, 可得 $f(0) = f(x) + f(-x) - 1 = 1$,
 又 $f(4x) = 4f(x) - 3$, $\therefore f(-4) = 2 - f(4) =$
 $2 - [4f(1) - 3] = 2 - [4 \times (-2) - 3] = 13$,
 $\therefore f(x)$ 在区间 $[-4, 4]$ 上的最大值为 13,
 故 C 错误;

对于 D, $\because f(2x^2) \geq f(3x) + 2f(x) + 4 =$
 $3f(x) + 2f(x) + 2 = 5f(x) - 4 + 6 = f(5x) +$
 $6 = f(5x) - 1 + 7$, $\therefore f(2) = 2f(1) - 1 =$
 -5 , $f(-2) + f(2) = 2$, $\therefore f(-2) = -f(2) +$
 $2 = 7$, $\therefore f(2x^2) \geq f(5x) + f(-2) - 1 = f(5x -$
 $2)$, 又 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $\therefore 2x^2 \leq$
 $5x - 2$, 解得 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 故 D 正确.

故选 ABD.

6. $(-\infty, 8)$ 【解析】 \because 存在 $x \in [1, 2]$, 使得不等式 $x^2 - (a-4)x + 3 > 0$ 成立, \therefore 存在 $x \in [1, 2]$, 使得不等式 $a - 4 < \frac{x^2 + 3}{x} = x + \frac{3}{x}$ 成立.

设 $f(x) = x + \frac{3}{x}$, $x \in [1, 2]$, 由对勾函数的性质可知 $f(x)$ 在 $[1, \sqrt{3}]$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{3}, 2]$ 上单调递增, 且 $f(1) = 4$, $f(2) = \frac{7}{2}$, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 4$, $\therefore a - 4 < 4$, $\therefore a < 8$.

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 8)$.

7. $-\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $f(x) =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \leq c, \\ x - x^2, & c < x \leq 2, \end{cases}$$

若 $c > 0$, 则当 $0 < x \leq c$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} \in \left(-\infty, -\frac{1}{c}\right]$, 不合题意.

若 $c = 0$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} \in (0, +\infty)$, 不合题意.

所以 $c < 0$, 当 $x \leq c$ 时, $0 < -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{c}$,

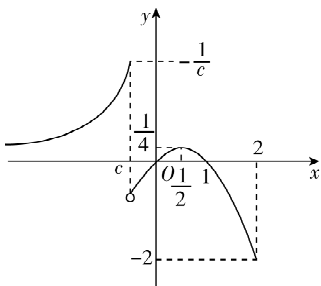
即 $f(x) \in \left(0, -\frac{1}{c}\right]$,

当 $c < x \leq 2$ 时, $f(x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, 图象开口向下, 对称轴为直



线 $x = \frac{1}{2}$, 当 $x = 2$ 时, $f(2) = 2 - 4 = -2$,

作出 $f(x)$ 的大致图象如图.



因为 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$, 所以

$$\begin{cases} -\frac{1}{c} = 2, \\ c - c^2 \geq -2, \end{cases} \text{ 解得 } c = -\frac{1}{2}, \text{ 经检验, 符合}$$

题意.

8. 【解】(1) 对任意 $x \in (1, 2]$, $f(x) = x^2 + ax + 3 \geq a$ 恒成立, 则 $0 < x - 1 \leq 1$, $-a(x - 1) \leq x^2 + 3$,

令 $m = x - 1 \in (0, 1]$, 则 $x = m + 1$, 所以 $-am \leq (m + 1)^2 + 3 = m^2 + 4 + 2m$, 得 $-a \leq m + \frac{4}{m} + 2$.

令 $p(m) = m + \frac{4}{m} + 2$, 其中 $m \in (0, 1]$, 则

函数 $p(m)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 所以 $p(m)_{\min} = p(1) = 7$, 所以 $-a \leq 7$, 解得 $a \geq -7$.

因此, 实数 a 的取值范围是 $[-7, +\infty)$.

(2) 由题知 $g(x) = f(x) - (a - 2)x + a = (x + 1)^2 + a + 2 \geq a + 2$, 令 $t = g(x) \geq a + 2$,

则 $y = g(g(x)) = g(t) = (t + 1)^2 + a + 2$, $t \geq a + 2$, 则 $g(t)$ 为图象开口向上, 对称轴为直线 $t = -1$ 的二次函数.

当 $a + 2 < -1$, 即 $a < -3$ 时, $g(t)$ 在 $[a + 2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $g(t) \geq g(-1) = a + 2 = 5$, 解得 $a = 3$, 不符合要求, 舍去;

当 $a + 2 \geq -1$, 即 $a \geq -3$ 时, $g(t)$ 在 $[a + 2, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $g(t) \geq g(a + 2) = a^2 + 7a + 11 = 5$, 解得 $a = -1$ 或 $a = -6$ (舍去).

综上所述, $a = -1$.

9. (1) 【解】 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则



$$f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1^2 + \frac{2}{x_1}\right) - \left(x_2^2 + \frac{2}{x_2}\right) = (x_1^2 - x_2^2) + \left(\frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) \cdot \left[(x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2}\right],$$

$$\because 1 < x_1 < x_2, \therefore x_1 - x_2 < 0, x_1 + x_2 > 2 > \frac{2}{x_1 x_2},$$

$$\therefore x_1 + x_2 - \frac{2}{x_1 x_2} > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【证明】由 $f(m) = f(n)$, 得 $m^2 + \frac{2}{m} =$

$$n^2 + \frac{2}{n}, \text{ 化简得 } m^2 - n^2 = \frac{2}{n} - \frac{2}{m} =$$

$$\frac{2(m-n)}{mn},$$

又 $m - n \neq 0, \therefore mn(m+n) = 2$, 而 $m \neq$

$$n, m+n > 2\sqrt{mn}, \therefore 2 = mn(m+n) >$$

$$2(\sqrt{mn})^3, \therefore mn < 1.$$

(3) 【解】不妨设存在满足题意的实数 a ,

$$b, \because 0 \notin [a, b], \therefore a < b < 0 \text{ 或 } 0 < a < b,$$

当 $0 < a < b$ 时, 由 (1), 同理可证 $f(x)$

在 $(0, 1)$ 上单调递减, 又 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$

上单调递增,

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上的最小值为 } f(1) =$$

$$3, \text{ 故 } 3a \geq 3, \therefore a \geq 1,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上单调递增},$$

$$\therefore \begin{cases} f(a) = 3a, \\ f(b) = 3b, \end{cases} \therefore a, b \text{ 是 } f(x) = 3x \text{ 在 } (0,$$

$+\infty)$ 上的两根.

$$\text{由 } f(x) = 3x, \text{ 得 } x^2 + \frac{2}{x} = 3x, \text{ 即 } x^3 - 3x^2 +$$

$$2 = 0, (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0,$$

$$\text{又 } b > a \geq 1, \therefore a = 1, b = \sqrt{3} + 1.$$

当 $a < b < 0$ 时, 由 (1), 同理可证 $f(x)$ 在

$(-\infty, 0)$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} f(a) = 3b, \\ f(b) = 3a, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a^2 + \frac{2}{a} = 3b, \\ b^2 + \frac{2}{b} = 3a, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a^3 + 2 = 3ab, \\ b^3 + 2 = 3ab, \end{cases} \therefore a^3 + 2 = b^3 + 2, \therefore a = b,$$

矛盾.

综上所述, 存在满足题意的正实数 a, b ,

$$\text{且 } a = 1, b = \sqrt{3} + 1.$$



3.2.2 奇偶性



对点上分

1. A 【解析】对于 A, $f(-x) = (-x)^4 - 1 = x^4 - 1 = f(x)$, 且定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 为偶函数, 故正确;

对于 B, 定义域不关于原点对称, 则 $f(x)$ 为非奇非偶函数, 故错误;

对于 C, $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$, 且函数定义域 $\{x | x \neq 0\}$ 关于原点对称, 则 $f(x)$ 为奇函数, 故错误;

对于 D, $f(x) = x^3, x \neq 0, f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 且定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, $f(x)$ 为奇函数, 故错误.

2. C 【解析】当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2 + 1, f(-x) = x^2 + 1 = f(x)$, $f(x)$ 为偶函数.

当 $f(x)$ 是偶函数时, 由 $f(x) = f(-x)$, 得 $x^2 + (a-2)x + 1 = x^2 - (a-2)x + 1$ 恒成立, 可得 $2(a-2)x = 0$ 恒成立, 即 $a = 2$.

所以“ $a = 2$ ”是“ $f(x)$ 是偶函数”的充要条件, 故选 C.

3. D



攻略上分

该函数为分段函数, 第一段化简后为 $f(x) = x^2 (x \neq 1)$, 然后再利用通法攻略 22 中的方法进行判断.

【解析】观察函数解析式, $f(1) = -1, f(-1) = 1$, 此时满足 $f(x) = -f(-x)$.

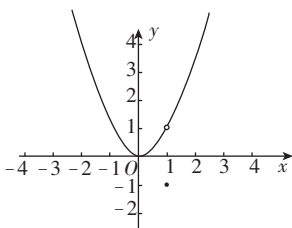
但是当 $x \neq \pm 1$ 时, $f(x) = x^2 = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数, 故 D 正确.

一题多解

原函数的解析式可化为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1, \\ -1, & x = 1, \end{cases} \quad \text{函数图象如图所示,}$$

观察可得函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数, 故 D 正确.



**方法总结**

判断分段函数奇偶性的口

诀可以概括为“先判定义域,再分段观察.

(1)先判定义域:首先判断函数的定义域是否关于原点对称,如果定义域不关于原点对称,那么该函数就是非奇非偶函数;

(2)再分段观察:如果定义域关于原点对称,那么需要分段研究每一个区间的函数的性质,从而判断整个分段函数的奇偶性.

4. A 【解析】根据题意, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} .

在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中,令 $x=y=0$,可得 $f(0)=f(0)+f(0)$,即 $f(0)=0$.

→ **提示**: 利用赋值法求出 $f(0)$ 的值是解决问题的关键

令 $y=-x$,可得 $f(0)=f(x)+f(-x)$,则有 $f(-x)=-f(x)$,即函数 $f(x)$ 是奇函数.故 A 正确.

方法总结

判断抽象函数的奇偶性的方法

首先明确题干中给出的抽象函数满足的条件,通常是关于函数 $f(x), f(y), f(x\pm y)$ 等的一个等式,求解时通常令一个字母为 x ,另一个字母为 $-x$,凑出 $f(x), f(-x)$ 的关系,有时还要令两个字母均为 0,求得 $f(0)$ 的相关关系式或取值.

5. x^2+2 (答案不唯一) 【解析】由题意

$$\frac{f(-x)}{f(x)}=1, \text{得 } f(x) \text{ 为偶函数,且 } \forall x \in$$

$\mathbf{R}, f(x) \neq 0$,又 $f(0)=2$,则 $f(x)$ 的一个解析式为 $f(x)=x^2+2$.

6. B 【解析】因为函数 $f(x)$ 为奇函数,当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2-3$,所以 $f(-2)=-f(2)=- (4-3)=-1$,故选 B.

→ **提示**: 求 $f(a)$ 的值,可利用函数的奇偶性先求出 a 的相反数的函数值 $f(-a)$

**一题多解**

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 所以 $f(-x) = x^2 - 3$, 结合函数为奇函数知 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $-f(x) = x^2 - 3$, 即 $f(x) = -x^2 + 3 (x < 0)$, 则 $f(-2) = -2^2 + 3 = -1$, 故选 B.

7. D 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[a-2, 3a]$ 上的偶函数,

提示: 具有奇偶性的函数具有双对称性, 即定义域关于原点对称, 图象关于原点或 y 轴对称

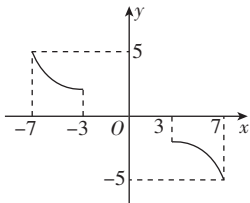
所以 $a-2+3a=0$, 即 $a=\frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx$, 其图象的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2 \times \frac{1}{2}} = -b$, 所以 $-b=0$, 即 $b=0$, 所以 $a+b = \frac{1}{2}$. 故选 D.

8. BC 【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数, \therefore 在关于原点对称的区间内函数的单调性相同, $\therefore f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上也单调递减.

又 $\because f(x)$ 的图象关于原点对称, $f(-7) = 5$, $\therefore f(7) = -f(-7) = -5$, $\therefore f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上的最小值为 -5 . 故 BC 正确.

快解

由题意画出符合条件的函数 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示, 由图可知函数 $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上单调递减, 且最小值为 -5 .



9. A 【解析】根据题意, 设 $g(x) = f(x) - a = x^3 + 2x$, 则 $g(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x) = -(x^3 + 2x) = -g(x)$, 又因为 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $g(x)$ 是奇函数, 即 $g(x) + g(-x) = 0$, 故 $f(x) - a + f(-x) - a = 0$, 即 $f(x) + f(-x) = 2a$.

因为 $f(m) + f(-m) = 2$, 所以 $2a = 2$, 解得 $a = 1$, 则 $f(x) = x^3 + 2x + 1$. 故 $f(a) = f(1) = 1^3 + 2 \times 1 + 1 = 4$, 故 A 正确.

**一题多解**

由 $f(m) + f(-m) = 2$, 得 $[f(m) - 1] + [f(-m) - 1] = 0$, 即 $[f(x) - 1] + [f(-x) - 1] = 0$. 令 $g(x) = f(x) - 1$, 则 $g(-x) + g(x) = 0$, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 所以 $g(0) = 0$, 即 $f(0) - 1 = 0$, 则 $a - 1 = 0$, 即 $a = 1$, 所以 $f(a) = f(1) = 1^3 + 2 \times 1 + 1 = 4$, 故选 A.

10. ABC 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且两函数在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减. 因为 $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $g(0) = 0$.

对于 A, 由 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 得 $g(-1) > g(2)$, 故 $g(g(-1)) < g(g(2))$, 故 A 正确;

对于 B, $g(f(-1)) = g(f(1))$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(1) < f(2)$, 又 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 故 $g(f(-1)) = g(f(1)) > g(f(2))$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 故 $0 = g(0) > g(1) > g(2)$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故 $f(g(1)) < f(g(2))$, 故 C 正确;

对于 D, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(1) < f(2)$, 但不确定 $|f(1)|, |f(2)|$ 的大小关系, 无法比较 $f(f(1)), f(f(2))$, 故 D 错误. 故选 ABC.

11. -1 【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$, 即 $|-x-1| + |-x-a| = |x-1| + |x-a|$, 所以 $|x+1| + |x+a| = |x-1| + |x-a|$, 所以 $a = -1$.

12. 【解】(1) 由奇函数的定义域关于原点对称, 知 $a = 1$, 又 $f(0) = 0$, 所以 $a + b = 0$, 所以 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

(2) $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减.

证明: 设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, $f(x_1) - f(x_2) =$

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} - \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = -\frac{(x_1 x_2 + 1)(x_1 - x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}.$$

又由 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 知 $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 x_2 + 1 > 0$, $x_1^2 - 1 < 0$, $x_2^2 - 1 < 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) >$



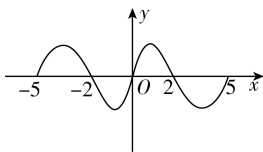
0, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减.

(3) $f\left(\frac{1}{t}\right) + f\left(1 - \frac{t}{2}\right) < 0$, 即 $f\left(\frac{1}{t}\right) < -f\left(1 - \frac{t}{2}\right)$, 因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数, 所以 $f\left(\frac{1}{t}\right) < f\left(\frac{t}{2} - 1\right)$, 又函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减,

$$\text{所以} \begin{cases} -1 < \frac{1}{t} < 1, \\ -1 < 1 - \frac{t}{2} < 1, \text{解得 } 1 < t < 1 + \sqrt{3}, \text{所} \\ \frac{1}{t} > \frac{t}{2} - 1, \end{cases}$$

以不等式的解集为 $\{t \mid 1 < t < 1 + \sqrt{3}\}$.

13. D 【解析】根据奇函数图象的特点补全函数 $f(x)$ 的图象, 如图, 根据图象可得使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值集合为 $(-2, 0) \cup (2, 5)$. 故 D 正确.



一题多解

由题图可得, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \in (2, 5)$ 时, $f(x) < 0$. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$. 所以当 $x \in (-2, 0)$ 时, $-x \in (0, 2)$, 故 $f(x) = -f(-x) < 0$; 当 $x \in (-5, -2)$ 时, $-x \in (2, 5)$, 故 $f(x) = -f(-x) > 0$. 综上, 使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值集合为 $(-2, 0) \cup (2, 5)$. 故 D 正确.

14. D



攻略上分

根据题干中“ $f(1-x) = -f(3+x)$ ”, 可得 $f(1-x) + f(3+x) = 0$, 可以运用对称性快速求解.

【解析】因为 $f(1-x) = -f(3+x)$, 所以 $f(2-x) = -f(2+x)$. 令 $g(x) = f(2+x)$, 由已知可得 $g(-x) = f(2-x) = -f(2+x) = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 即函数 $f(2+x)$ 的图象关于原点对称, 故 D 正确.

15. C 【解析】由题可知 $f(x)$ 的定义域为



\mathbf{R} , 且 $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 排除 A, B. 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 排除 D. 故选 C.

16. B 【解析】因为 $f(2+x) = f(-x)$, 所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 所以 $f(2) = f(0)$, 又当 $x \leq 1$ 时, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减.

因为 $-1 < 0 < 1$, 所以 $f(1) < f(0) < f(-1)$, 即 $f(1) < f(2) < f(-1)$. 故选 B.

17. AB 【解析】对于 A, 因为 $f(x) = x^3 - 3x^2$, 所以 $f(x+1) + 2 = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 2 = x^3 - 3x$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, -2)$ 对称, 故正确;

对于 B, $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = (x-1)^4 - 1$, $f(x+1) = (x+1-1)^4 - 1 = x^4 - 1$ 为偶函数, 故正确;

对于 C, 由反比例函数的性质及函数图象的平移可知 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 故错误;

对于 D, $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5}$, $f(x-2) = \frac{x-4}{(x-4)^2+1} = \frac{x-4}{x^2-8x+17}$ 不是奇函数, 故错误.

18. 4 【解析】 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 则有 $f(-x) = -f(x)$,

$$g(x) = \frac{2(x+4)^2 + f(x)}{x^2 + 16} = \frac{2x^2 + 16x + 32 + f(x)}{x^2 + 16} = 2 + \frac{16x + f(x)}{x^2 + 16}.$$

设 $h(x) = g(x) - 2 = \frac{16x + f(x)}{x^2 + 16}$, 函数

$$h(x) \text{ 的定义域为 } \mathbf{R}, h(-x) = \frac{16(-x) + f(-x)}{(-x)^2 + 16} = \frac{-16x - f(x)}{x^2 + 16} =$$

$$-\frac{16x + f(x)}{x^2 + 16} = -h(x), \text{ 所以 } h(x) \text{ 为奇函数, 则有 } h(x)_{\max} + h(x)_{\min} = 0, \text{ 即 } M -$$

$$2 + m - 2 = 0, \text{ 所以 } M + m = 4.$$

19. ①②③④ 【解析】对于①, 若 $y = f(x+1)$



为偶函数,则其函数图象关于直线 $x=0$ 对称,又 $y=f(x+1)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得 $f(x)$ 的图象,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,正确;

对于②, $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度可得 $f(x-1)$ 的图象,将 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称得 $f(-x)$ 的图象,然后将其图象向右平移 1 个单位长度得 $f(1-x)$ 的图象,故 $f(x-1)$ 与 $f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,故正确;

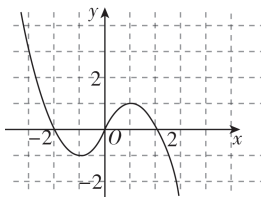
对于③,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$,故 $f(x+1) = f(1-x)$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,故正确;

对于④,因为 $f(x)$ 为奇函数,且 $f(x) = f(-x-2)$,所以 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,故正确. 故答案为①②③④.

20. 【解】 (1) 依题意,设 $x > 0$, 有 $-x < 0$, 则 $f(-x) = (-x)^2 - 2x = x^2 - 2x$.

因为 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数,所以 $f(x) = -f(-x) = -x^2 + 2x$. 所以当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = -x^2 + 2x$.

(2) 由已知及 (1) 得函数 $f(x)$ 的图象如下:



观察图象,得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1, 1]$ (或 $(-1, 1)$).

(3) 当 $x \in [-3, 1]$ 时,由图象知,函数 $f(x)$ 在 $[-3, -1)$ 上单调递减,在 $[-1, 1]$ 上单调递增.

当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 有最小值,即 $f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) = -1$;

当 $x = -3$ 时, $f(x)$ 有最大值,即 $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) = 3$.

所以当 $x \in [-3, 1]$ 时,函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 3]$.



能力上分

1. A 【解析】 因为 $g(x) = f(2x) + x^2$ 为奇函数,所以 $g(x) + g(-x) = f(2x) + x^2 +$



$$f(-2x) + (-x)^2 = f(2x) + f(-2x) + 2x^2 = 0,$$

令 $x=1$, 得 $f(2) + f(-2) + 2 \times 1^2 = 0$, 所以

以 $f(-2) = -2 - f(2) = -2 - 2 = -4$. 故选 A.

2. A 【解析】 $f(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{-(1-x)+2}{1-x} =$

$$-1 - \frac{2}{x-1},$$

 **提示:** 分离常数

因为 $f(1-x) + f(1+x) = -1 - \frac{2}{1-x-1} - 1 -$

$$\frac{2}{1+x-1} = -2, \text{ 所以 } f(x) \text{ 图象的对称中心}$$

为点 $(1, -1)$, 由题意得函数 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数, 其图象关于点 $(0, 0)$ 对称,

则 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称, 解得

$a=1, b=-1$, 故选 A.

二级结论 若 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称.

若 $y = f(x+a)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

3. A 【解析】函数 $f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-|a-x|}$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$, 即得 $\frac{\sqrt{25-x^2}}{-x-|a+x|} =$

$$\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-|a-x|}, y = \sqrt{25-x^2} \text{ 的定义域为 } [-5, 5], \text{ 在 } [-5, 5] \text{ 或其子集上 } x-|a-x| = -x-|a+x|,$$

$$\text{即得 } 2x = |a-x| - |a+x|, \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} a-x \leq 0, \\ a+x \leq 0 \end{cases} \text{ 恒成立, 所以 } \begin{cases} a \leq (-x)_{\min}, \\ a \leq x_{\min}, \end{cases} \text{ 又}$$

$$-5 \leq x \leq 5, \text{ 可得 } a \leq -5. \text{ 故选 A.}$$

方法总结 由函数奇偶性求参数的两种常见方法:

(1) 方程法: 根据奇函数或偶函数的定义来列出等式, 对于奇函数, 有 $f(-x) = -f(x)$, 对于偶函数, 有 $f(-x) = f(x)$, 将这两个等式代入函数解析式, 可以求解得到参数的值;

(2) 特殊化策略: 根据定义域内关于原点对称的特殊自变量值所对应的函数值关系来列方程求解. 但需要注意的是, 这种方法求出的参数值需要代入原函数解析式进行检验, 看是否满足条件, 不满足的要舍去.



4. C 【解析】设 $g(x) = \frac{a}{x} + bx$ ($a > 0, b > 0$), $f(x) = g(x) + 5$, 则 $g(x)$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 3. $\therefore g(x)$ 为奇函数, $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的最大值为 -3, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有最大值 2, 故 C 正确.

5. B 【解析】设 $F(x) = xf(x)$, 由 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 知 $F(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -F(x)$, 所以 $F(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

由题意, 若 $\forall a, b \in [0, +\infty)$, 且 $a \neq b$, 都有 $\frac{F(a) - F(b)}{a - b} < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $F(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $F(x)$ 图象关于原点对称, 则 $F(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数.

由不等式 $f\left(\frac{1}{t}\right) - (t^2 - 2t)f(t - 2) > 0$, 可知 $t \neq 0$.

① 当 $t > 0$ 时, 不等式可化为

$$\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) - (t - 2)f(t - 2) > 0, \text{ 即 } F\left(\frac{1}{t}\right) > F(t - 2), \text{ 故 } \frac{1}{t} < t - 2, \text{ 由 } t > 0, \text{ 得 } t^2 - 2t - 1 >$$

0, 解得 $t < 1 - \sqrt{2}$ (舍) 或 $t > 1 + \sqrt{2}$;

② 当 $t < 0$ 时, 不等式可化为

$$\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) - (t - 2)f(t - 2) < 0, \text{ 即 } F\left(\frac{1}{t}\right) < F(t - 2), \text{ 故 } \frac{1}{t} > t - 2, \text{ 由 } t < 0, \text{ 得 } t^2 - 2t - 1 >$$


0, 解得 $t < 1 - \sqrt{2}$ 或 $t > 1 + \sqrt{2}$ (舍).

综上所述, 不等式 $f\left(\frac{1}{t}\right) - (t^2 - 2t)f(t - 2) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$. 故选 B.

6. $\pm \frac{1}{2024}$ 【解析】 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 关于点 $(0, 0)$ 对称.

$$\text{又 } f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = f(x),$$

则 $f(x)$ 为偶函数,

 **提示:** 函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ 的解析式中含有的未知数 x 的项均为平方式, 因此可直接判断出其为偶函数



因此 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 又

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1+x^2}{x^2-1} = -f(x), \text{ 即}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0, \text{ 则 } f\left(\frac{1}{2\,024}\right) + f(2\,024) = 0.$$

又 $f(2\,024) + f(x) = 0$, 可得 $f(x) =$

$$f\left(\frac{1}{2\,024}\right), \text{ 则 } x = \frac{1}{2\,024}.$$

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f\left(\frac{1}{2\,024}\right) =$

$$f\left(-\frac{1}{2\,024}\right) = f(x), \text{ 此时 } x = -\frac{1}{2\,024}.$$

综上, $x = \pm \frac{1}{2\,024}$.

7.12 【解析】 因为函数 $y=f(x)-2$ 为奇函数, 故函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$

对称, 又 $g(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{x} + 2$, 其图象也

关于点 $(0,2)$ 对称, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的

图象的交点关于点 $(0,2)$ 对称, 则 $y_1 +$

$y_2 + \cdots + y_6 = 3 \times 4 = 12$, 故答案为 12.

8. 【证明】 (1) 取 $x=y=1$ 代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$, 得 $f(1)=0$.

取 $y = \frac{1}{x}$ 代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$, 得

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ 故 } f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$


(2) 取 $y=-1$ 代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$,

得 $f(x)+f(-1)=f(-x)$,

取 $x=y=-1$ 代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$,

$f(-1)+f(-1)=f(1)$, 所以 $f(-1)=0$,

所以 $f(x)=f(-x)$,

 **方法**: 利用赋值法判断抽象函数的奇偶性, 通常将其中一个字母赋值为 $-x$, 由此可得到 $f(x), f(-x)$ 间的关系. 又 $f(x)$ 定义域 $\{x|x \neq 0\}$ 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$, 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$,

由题设知 $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f\left(\frac{1}{x_1}\right) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0,$$



所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

方法: 利用赋值法判断抽象函数的单调性, 通常根据已知等式构造出 $f(x_2) - f(x_1)$, 根据条件中的不等式关系, 判断出 $f(x_2) - f(x_1)$ 的符号

因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x_2) > f(-x_1)$, 而 $-x_1, -x_2 \in (-\infty, 0)$, $-x_1 > -x_2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

9. (1) 【解】当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, $f(-x) =$

$$\frac{-3x}{-x-1} = \frac{3x}{x+1},$$

$$\because f(x) \text{ 为奇函数}, \therefore f(x) = -f(-x) = \frac{-3x}{x+1},$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x-1}, & x \leq 0, \\ \frac{-3x}{x+1}, & x > 0. \end{cases}$$

(2) 【证明】任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$,

$$\text{且 } x_1 < x_2, f(x_1) - f(x_2) = \frac{-3x_1}{x_1+1} - \frac{-3x_2}{x_2+1} =$$

$$\frac{3(x_2 - x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)},$$

$$\because 0 \leq x_1 < x_2, \therefore x_2 - x_1 > 0, x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0,$$

$$\therefore \frac{3(x_2 - x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2),$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 【解】 $\because f(m - 3x^2) + f(2x^2 - 4x - 3) \geq 0$ 恒成立,

$$\therefore f(m - 3x^2) \geq -f(2x^2 - 4x - 3) \text{ 恒成立.}$$

$$\text{又 } \because f(x) \text{ 为奇函数}, \therefore f(m - 3x^2) \geq f(-2x^2 + 4x + 3) \text{ 恒成立.}$$

由(2)知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

$$\therefore m - 3x^2 \leq -2x^2 + 4x + 3 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore m \leq x^2 + 4x + 3 \text{ 恒成立.}$$

令 $h(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$, 当 $x = -2$ 时, $h(x)$ 取得最小值 -1 , $\therefore m \leq -1$.

3.2 节测上分

1. D 【解析】因为函数 $f(x) = x^2 - mx + 1$ 与函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 且 $g(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 上单调递增, 所



以 $f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 上单调递减, 故

$$\frac{m}{2} \geq 4, \text{ 解得 } m \geq 8. \text{ 故选 D.}$$

2. A 【解析】 $\because f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2} =$

$$\sqrt{2x-x^2}, \therefore F(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{x}-1}, \text{ 且 } F(x) \text{ 是减函数.}$$

→ **提示**: 因为函数 $y = \frac{2}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上

单调递减, 所以 $y = \sqrt{\frac{2}{x}-1}$ 在 $(0, 1)$ 上

单调递减

$$\because 0 < x_1 < x_2 < 1, \therefore \frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}. \text{ 故 A}$$

正确.

关键点拨

解答本题的关键有两

点: (1) 构造新函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$;

(2) 判断新函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, 1)$

上的单调性.

3. B 【解析】因为 $f(x_1) - f(x_2) >$

$4(x_1 - x_2)$, 所以 $f(x_1) - 4x_1 > f(x_2) - 4x_2$.

设 $g(x) = f(x) - 4x$, 因为 $x_1 > x_2$, $g(x_1) > g(x_2)$, 所以 $g(x) = f(x) - 4x$ 在 \mathbf{R} 上是增函数.

因为 $f(2) = 16$, 所以 $g(2) = f(2) - 8 = 8$.

因为 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以

$g(x) = f(x) - 4x$ 为奇函数, 所以

$g(-2) = -8$, $g(0) = 0$, 不等式 $4x - 8 <$

$f(x) < 4x$ 可转化为 $-8 < f(x) - 4x < 0$, 即

$g(-2) < g(x) < g(0)$, 所以 $-2 < x < 0$, 即

$4x - 8 < f(x) < 4x$ 的解集为 $(-2, 0)$. 故

选 B.

4. D 【解析】 $f(x) = \frac{x^4 - 2x + 3}{x} = x^3 - 2 + \frac{3}{x}$,

$$\text{令 } g(x) = f(x) + 2 = x^3 + \frac{3}{x} (x \neq 0),$$

$$\because g(-x) = (-x)^3 + \frac{3}{-x} = -x^3 - \frac{3}{x} =$$

$-g(x)$, $\therefore g(x)$ 为奇函数.

当 $x \in [a, b]$ 时, $f(x) \geq 2$, 则 $g(x) \geq 4$,

\therefore 当 $x \in [-b, -a]$ 时, $g(x) = f(x) + 2 \leq$

-4 , $\therefore f(x) \leq -6$. 故选 D.

5. ABD 【解析】由题意得 $f(0) = 3$, 得

$$f(f(0)) = f(3) = 9 - 6a + 2a = 0, \text{ 得 } a = \frac{9}{4},$$

A 正确.

若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 则

$$\begin{cases} a > 0, \\ -\frac{2a}{2 \times 1} \leq 2, \\ 2a + 3 \leq 4 - 4a + 2a, \end{cases} \quad \text{得 } 0 < a \leq \frac{1}{4}, \text{ B 正确.}$$

若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3]$ 上单调递减, 则

$$\begin{cases} a < 0, \\ -\frac{2a}{2 \times 1} \geq 3, \\ 2a + 3 \geq 4 - 4a + 2a, \end{cases} \quad \text{不等式组无解, C}$$

错误.

若 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 则 $a > 0$, 得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递增.

当 $0 < a \leq 2$ 时, 要使 $f(x)$ 值域为 \mathbf{R} , 则需

$$\text{满足 } 2a + 3 \geq 4 - 4a + 2a, \text{ 得 } a \geq \frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{1}{4} \leq$$

$$a \leq 2.$$

当 $a > 2$ 时, 函数 $y = x^2 - 2ax + 2a$ 在 $(2, a)$

上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 则

要使 $f(x)$ 值域为 \mathbf{R} , 需满足 $2a + 3 \geq a^2 -$

$2a^2 + 2a$, 化简得 $a^2 + 3 \geq 0$ 恒成立, 故

$$a > 2.$$

综上, a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, D 正

确. 故选 ABD.

6. AC 【解析】由图象知 $y = f(x)$ 的定义域

为 \mathbf{R} , $y = f(x)$ 是偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单

调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; $y = g(x)$

的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $y =$

$g(x)$ 是奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

对于 A, $y = f(x)g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,$

$0) \cup (0, +\infty)$, 又因为 $f(-x)g(-x) =$

$f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x)$, 所以 $y =$

$f(x)g(x)$ 是奇函数, 故 A 正确;

对于 B, 令 $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = -\frac{1}{x^3}$,

则 $f(x)g(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}$, $2 < 3$, 但

$$f(2)g(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, f(3)g(3) =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}, \frac{3}{8} > \frac{8}{27}, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0), x_1 < x_2$, 由图象知 $g(x_1) > 0, g(x_2) > 0$, 因为 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $0 < g(x_1) < g(x_2)$, 又因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$, 即 $y=f(g(x))$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故 C 正确;

对于 D, 令 $f(x) = 1 - x^2, g(x) = -\frac{1}{x^3}$,

则 $f(x)g(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$, 故 $y=f(x)g(x)$ 的定义域不能为 \mathbf{R} , 故 D 错误. 故选 AC.

7. 点 $(-1, 1)$ 【解析】由题意可知函数 $f(x-1)$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 中心对称, 因为函数 $f(x)$ 的图象由函数 $f(x-1)$ 的图象向左平移 1 个单位长度得到, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 中心对称.

函数 $f(x)+1$ 的图象由 $f(x)$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到, 所以函数 $f(x)+1$ 的图象关于点 $(-1, 1)$ 中心对称.

易错警示 弄错图象平移的方向或单位长度而致错

在进行图象平移时, 要明确平移的方向(如向左、向右、向上、向下)和距离, 确保图象在平移后形状和大小不变; 同时准确找到平移前后的对应点. 确定平移的距离和方向时, 可以借助平行线法、对应点连线法等方法.

8. $\left[\frac{11}{3}, +\infty\right)$ 【解析】函数 $y=x^3$ 是增函数, $y=x$ 也是增函数, 所以 $f(x)=x^3+x$ 是增函数,

不等式 $f(-x^2+mx-2) \geq 0$ 等价于 $f(-x^2+mx-2) \geq f(0)$,

所以 $-x^2+mx-2 \geq 0$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立, 即 $m \geq x + \frac{2}{x}$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立,

即 $m \geq \left(x + \frac{2}{x}\right)_{\max}, x \in [1, 3]$.

函数 $y=x + \frac{2}{x}$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 在区间 $(\sqrt{2}, 3]$ 上单调递增,

当 $x=1$ 时, $y=3$, 当 $x=3$ 时, $y=\frac{11}{3}$, 所以



函数 $y = x + \frac{2}{x}$ 的最大值为 $\frac{11}{3}$, 所以

$$m \geq \frac{11}{3}.$$

9. (1) 【证明】令 $x = y = 0$, 则有 $f(0) + f(0) = f(0)$, $\therefore f(0) = 0$,

令 $y = -x$, 则有 $f(x) + f(-x) =$

$$f\left(\frac{x-x}{1-x^2}\right) = f(0) = 0,$$

$\therefore f(-x) = -f(x)$, $x \in (-1, 1)$, \therefore 函数 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 【证明】设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $-x_1 \in (-1, 1)$, $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2}\right)$.

因为 $x_2 - x_1 > 0$, $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, 所以

$$|x_1 x_2| < 1, \text{ 即 } -1 < x_1 x_2 < 1, \text{ 则 } \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} > 0,$$

$$\text{又 } \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} - 1 = \frac{(1 + x_1)(x_2 - 1)}{1 - x_1 x_2} < 0, \text{ 所以 } 0 <$$

$$\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} < 1, \text{ 所以 } f\left(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2}\right) < 0,$$

所以 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减.

(3) 【解】由 (1) (2) 知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 且为奇函数,

所以当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 的

$$\text{最小值为 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$

所以 $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \forall a \in [-1, 1]$,

$f(x) \geq -t^2 + 4at - 4$ 恒成立等价于

$\forall a \in [-1, 1], -t^2 + 4at - 4 \leq -1$ 恒成立,

即 $\forall a \in [-1, 1], 4ta - t^2 - 3 \leq 0$ 恒成立.

设 $g(a) = 4ta - t^2 - 3, a \in [-1, 1]$, 则

$g(a)$ 是关于 a 的一次函数, 所以

$$\begin{cases} g(-1) \leq 0, \\ g(1) \leq 0, \end{cases}$$

提示: 因为函数 $g(a) = 4ta - t^2 - 3$,

$a \in [-1, 1]$, 要么是一次函数, 要么

是常数函数, 所以要使 $4ta - t^2 - 3 \leq 0$,

只需在端点处的函数值均不大于 0 即可

$$\text{即 } \begin{cases} -t^2 - 4t - 3 \leq 0, \\ -t^2 + 4t - 3 \leq 0, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} t \leq -3 \text{ 或 } t \geq -1, \\ t \leq 1 \text{ 或 } t \geq 3, \end{cases}$$

则 $t \in (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$.



专题上分 3

函数的性质

及其应用

1. D 【解析】当 $a+5>1$, 即 $a>-4$ 时, 由

$$f(a+5) = -1, \text{ 得 } \frac{6}{a+5+1} - 2 = -1, \text{ 即 } a+6 =$$

6, 解得 $a=0$;

当 $a+5 \leq 1$, 即 $a \leq -4$ 时, 由 $f(a+5) = -1$, 得 $1 - (a+5) = -1$, 解得 $a = -3$ (舍去).

所以 $a=0$, 则 $f(a) = f(0) = 1 - 0 = 1$. 故 D 正确.

2. A 【解析】因为 $f(x) =$

$$\begin{cases} (a+3)x-3, & x < 1, \\ 1-\frac{a}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a+3 > 0, \\ a > 0, \\ a+3-3 \leq 1-\frac{1}{2}a, \end{cases}$$

解得 $0 < a \leq \frac{2}{3}$. 故 A 正确.

易错警示 忽略分段函数的单调性特征而致错

每段都单调(即 $f_1(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调, $f_2(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调), 最重要的是一定要注意转折点处不反超.

3. A 【解析】当 $f(2m) \leq 1$ 时, 由 $1 -$

$$[f(2m)]^2 \geq 0 \text{ 得 } -1 \leq f(2m) \leq 1.$$

若 $2m \leq 1$, 即 $m \leq \frac{1}{2}$ 时, 由 $-1 \leq f(2m) \leq$

$$1 \text{ 得 } -1 \leq 1-4m^2 \leq 1, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{1}{2};$$

若 $2m > 1$, 即 $m > \frac{1}{2}$ 时, 由 $-1 \leq f(2m) \leq 1$

$$\text{得 } -1 \leq |2m-2|-1 \leq 1, \text{ 解得 } \frac{1}{2} < m \leq 2.$$

故当 $f(2m) \leq 1$ 时, 由 $f(f(2m)) \geq 0$, 解

$$\text{得 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 2.$$

当 $f(2m) > 1$ 时, 由 $|f(2m)-2|-1 \geq 0$ 得 $f(2m) \geq 3$.

若 $2m \leq 1$, 即 $m \leq \frac{1}{2}$ 时, 由 $f(2m) \geq 3$ 得

$$1-4m^2 \geq 3, \text{ 即 } m^2 \leq -\frac{1}{2}, \text{ 显然无解;}$$



若 $2m > 1$, 即 $m > \frac{1}{2}$ 时, 由 $f(2m) \geq 3$ 得

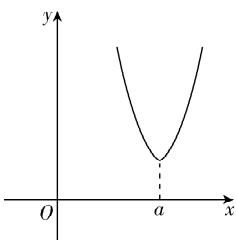
$$|2m-2|-1 \geq 3, \text{ 解得 } m \geq 3.$$

故当 $f(2m) > 1$ 时, 由 $f(f(2m)) \geq 0$, 解得 $m \geq 3$.

综上, 实数 m 的取值范围是

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right] \cup [3, +\infty). \text{ 故选 A.}$$

4. B 【解析】由题意, 画出函数 $f(x)$ 的大致图象,



由图猜想 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称, 下面进行证明.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(a+x) = (a+x)^2 - a(a+x) + 1 = x^2 + ax + 1,$$

$$f(a-x) = (a-x)^2 - 3a(a-x) + 2a^2 + 1 = x^2 + ax + 1, \text{ 故 } f(a+x) = f(a-x).$$

$$\text{同理, 当 } x < 0 \text{ 时, 也可得 } f(a+x) = f(a-x).$$

又当 $x = 0$ 时, $f(a+x) = f(a-x)$, 所以对 $\forall x \in \mathbf{R}, f(a+x) = f(a-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称,

$$\text{所以 } f(2a-1) < f(3-a) \text{ 等价于 } (2a-1-a)^2 < (3-a-a)^2, \text{ 即 } 3a^2 - 10a + 8 > 0, \text{ 解得 } a > 2 \text{ 或 } a < \frac{4}{3}.$$

又 $a > 0$, 所以 a 的取值范围是

$$\left(0, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty), \text{ 故选 B.}$$

$$\mathbf{5. BD} \quad \text{【解析】} f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x + \frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases} \quad \text{由于}$$

$$y = x + \frac{1}{x} \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减, 在 } (1,$$

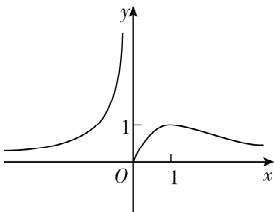
$$+\infty) \text{ 上单调递增, 且 } y = \frac{2}{x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上}$$

单调递减, 所以由复合函数的单调性可得 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$

上单调递减. $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调



递增. 作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



对于 A, B, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x)$ 单调递增, $f(x) \in (0, +\infty)$, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \in [0, 1]$.

综上, $f(x)$ 的最小值为 0, 无最大值, 故 A 错误, B 正确.

对于 C, 方程 $f(x) - t = 0$ 有一个实根等价于 $y = f(x)$ 与 $y = t$ 的图象有一个交点, 则实数 t 的取值范围是 $\{0\} \cup (1, +\infty)$, 故 C 错误.

对于 D, 设 $f(x) = t$, 方程 $g(f(x)) = 1$ 等

价于 $\begin{cases} f(x) = t \text{ ①,} \\ g(t) = 1 \text{ ②,} \end{cases}$ 由于 $t \in \{0\} \cup (1, +\infty)$ 时方程①有一解, $t = 1$ 时方程①有

两解, $t \in (0, 1)$ 时方程①有三解. 由 $g(t) = 1$ 得 $t^2 + 2mt + 2 = 0$, 则 $g(f(x)) = 1$ 有四个不等实根等价于 $t^2 + 2mt + 2 = 0$ 有两根 t_1, t_2 , 其中 $t_1 \in (0, 1)$, $t_2 \in \{0\} \cup (1, +\infty)$.

令 $h(t) = t^2 + 2mt + 2$, 因为 $h(0) = 2 > 0$, 所以 $t_2 \in (1, +\infty)$, 所以只需 $h(1) = 2m + 3 < 0$, 即 $m < -\frac{3}{2}$ 即可.

故 m 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{3}{2})$, 故 D 正确. 故选 BD.

6. B 【解析】 \because 函数 $f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(-x) = f(x)$, $\therefore ax^2 - (2+a)x + 1 = ax^2 + (2+a)x + 1$, 即 $(2+a)x = 0$ 对任意实数 x 恒成立, $\therefore 2+a = 0$, 解得 $a = -2$.

$\therefore f(x) = -2x^2 + 1$, 其单调递增区间为 $(-\infty, 0]$. 故 B 正确.

7. A 【解析】依题意, 得 $(a-1)^3 + (b-1)^3 \geq 3(2-a-b) = 3(1-a) + 3(1-b)$, 即 $(a-1)^3 + 3(a-1) \geq (1-b)^3 + 3(1-b)$.

→ **关键点** 将不等式两边转化为具有相同结构的形式

设 $f(x) = x^3 + 3x$, 易知 $f(x)$ 是奇函数且



$f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以原不等式可化为 $f(a-1) \geq f(1-b)$, 即 $a-1 \geq 1-b, a+b \geq 2$.

因为 $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq \frac{2^2}{2} = 2$, 当且仅当 $a=b=1$ 时, 等号成立, 所以 a^2+b^2 的最小值为 2. 故 A 正确.

8. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$



思路导引

利用偶函数的性质可以得到 $f(|1-3a|) < f(|2a-1|)$, 再利用 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上的单调性可得 a 满足的不等式组, 其解集即为所求.

【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的偶函数, $\therefore f(1-3a) < f(2a-1)$ 等价于 $f(|1-3a|) < f(|2a-1|)$,

又 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} |1-3a| > |2a-1|, \\ -1 < 1-3a < 1, \\ -1 < 2a-1 < 1, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{2}{5} < a < \frac{2}{3}.$$

9. (1) 【解】由 $f(x)$ 为奇函数, 且定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

可得 $f(-1) = -f(1)$, 即 $-(a-b+1) = -(a+b+1)$, 解得 $b=0$.

又 $f(1) = a+1 = 3$, 则 $a=2$, 所以 $f(x) =$

$2x + \frac{1}{x}$. 对任意 $x \in (-\infty, 0) \cup (0,$

$+\infty)$, $f(-x) = -2x - \frac{1}{x} = -f(x)$, 故 $f(x)$

为奇函数.

综上所述可得 $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

(2) 【证明】对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$,

且 $x_1 < x_2$,

$$\text{有 } f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + \frac{1}{x_1} - 2x_2 - \frac{1}{x_2}$$

$$= 2(x_1 - x_2) + \frac{(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(2x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2},$$

由 $1 \leq x_1 < x_2$, 可得 $2x_1 x_2 > 1, x_1 - x_2 < 0$,

则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 【解】由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为

$$f(1) = 3,$$



因为对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 都有 $m^2 - 2m \leq f(x)$, 所以 $m^2 - 2m \leq 3$, 即 $(m-3)(m+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq m \leq 3$,
即实数 m 的取值范围是 $[-1, 3]$.

10. C 【解析】根据题意, 依次分析选项:

因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = -x + \sqrt[3]{-x} = -(x + \sqrt[3]{x}) = -f(x)$, 所以 $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$ 为奇函数, 其图象关于原点中心对称, 故 A 错误.

$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} = \frac{2x-4+5}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$, 所以

$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ 的图象可由反比例函数 $y =$

$\frac{5}{x}$ 的图象向右平移 2 个单位长度, 再向

上平移 2 个单位长度得到, 且反比例函

数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象关于原点对称, 所以函

数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ 的图象关于点 $(2, 2)$ 中

心对称, 故 B 错误.

因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = |-x +$

$2a| + |-x - 2a| = |x - 2a| + |x + 2a| = f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数, 又因为 $f(x)$ 不是

常数函数, 所以 $f(x) = |x + 2a| + |x - 2a|$

不是中心对称图形, 故 C 正确.

函数 $f(x) = \begin{cases} x(1+x), & x \geq 0, \\ x(1-x), & x < 0 \end{cases}$ 的定义域为

\mathbf{R} , 且 $f(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时, $-x < 0$, $f(-x) = -x(1+x) = -f(x)$,

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = -x(1-x) = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 故 D 错误.

二级结论

函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0)$ 的

图象为中心对称图形, 其对称中心为

$$\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right).$$

11. C 【解析】因为正方形的边长为 1, 所

以 $AC = \sqrt{2}$, 由正方形的滚动轨迹知,

当 $x = 0$ 时, 点 C 位于点 $(0, 1)$, 即 $f(0) = 1$;

当 $x = 1$ 时, 点 C 位于点 $(1, \sqrt{2})$, 即 $f(1) = \sqrt{2}$;



当 $x = 2$ 时, 点 C 位于点 $(2, 1)$, 即 $f(2) = 1$;

当 $x = 3$ 时, 点 C 位于点 $(3, 0)$, 即 $f(3) = 0$;

当 $x = 4$ 时, 点 C 位于点 $(4, 1)$, 即 $f(4) = 1$;

当 $x = 5$ 时, 点 C 位于点 $(5, \sqrt{2})$, 即 $f(5) = \sqrt{2}$;

.....

所以 $f(x+4) = f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,

所以 $f(1) = \sqrt{2}$, $f(2\ 024) = f(4 \times 506) = f(0) = 1$, A, B 正确.

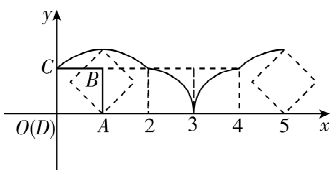
$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(4 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{21}{2}\right) = f\left(10 + \frac{1}{2}\right) = f\left(2 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right),$$

由图可知, $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{5}{2}\right)$, 所以

$$f\left(\frac{9}{2}\right) \neq f\left(\frac{21}{2}\right), \text{C 错误.}$$

$f(x)$ 在 $[2\ 023, 2\ 025]$ 与 $[3, 5]$ 上的单调性一致, 因为 $f(x)$ 在 $[3, 5]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[2\ 023, 2\ 025]$ 上单调递增, D 正确.



12. D 【解析】 因为 $f(2x-3)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称, 所以 $f(2x-3) + f(2(4-x)-3) = 2$, 即 $f(2x-3) + f(5-2x) = 2$, 用 x 代替 $2x$, 得 $f(x-3) + f(5-x) = 2$, 即 $f(x-3) = -f(5-x) + 2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, 所以 $f(1+x) + f(1-x) = 2$.

由 $f(2+x) - f(2-x) = 4x$, 可得 $f(2+x) - 2x = f(2-x) + 2x$, 即 $f(2+x) - 2(2+x) = f(2-x) - 2(2-x)$. 令 $g(x) = f(x) - 2x$, 则 $g(2+x) = g(2-x)$, 则 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.

又因为 $g(1+x) + g(1-x) = f(1+x) - 2(1+x) + f(1-x) - 2(1-x) = f(1+x) +$



$f(1-x)-4=2-4=-2$, 所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(1, -1)$ 对称, 即 $g(1+x)+g(1-x)=-2, g(2+x)+g(-x)=-2$.

又因为 $g(2+x)=g(2-x)$, 所以 $g(2-x)+g(-x)=-2$, 即 $g(2+x)+g(x)=-2, g(4+x)+g(x+2)=-2$, 所以 $g(x+4)=g(x)$, 故 $g(x)$ 是以 4 为周期的函数.

因为 $g(0)=f(0)-2\times 0=0, g(1)=-1, g(2)=-2-g(0)=-2, g(3)=g(1)=-1$, 所以 $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=-4$, 即 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=-4$, 所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=g(1)+g(2)+\cdots+g(50)+2(1+2+\cdots+50)=-4\times 12-1-2+2\ 550=2\ 499$. 故 D 正确.

13. ABD 【解析】令 $x=2$, 由 $f(x)=f(4-x)+9f(2)$, 得 $f(2)=f(2)+9f(2)$, $f(2)=0$, 所以 $f(x)=f(4-x)$, 即函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=2$.

又 $f(x+9)$ 的图象关于点 $(-9, 0)$ 对称, 令 $g(x)=f(x+9)$, 则 $g(-9+x)+g(-9-x)=0, f(-9+x+9)+f(-9-x+9)=f(x)+f(-x)=0$, 又 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f(x)$ 是奇函数.

$f(x+8)=f(4-(x+8))=f(-4-x)=-f(4+x)=-f(4-(4+x))=-f(-x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 8 为周期的函数.

对于 A, $f(2)=0$, 故 A 正确;

对于 B, $f(44)+f(45)+f(46)=f(4)+f(5)+f(6)=f(0)+f(-1)+f(-2)=0-f(1)-f(2)=-2\ 022$, 故 B 正确;

对于 D, 令 $t=\frac{1}{3}x-1$, 将 $x=3$ 代入得 $t=0$, 即要证明 $f(t)+3$ 的图象关于点 $(0, 3)$ 对称, 显然由 $f(-t)+3+f(t)+3=6$, 可知 $f(t)+3$ 的图象关于点 $(0, 3)$ 对称, 即 $f\left(\frac{1}{3}x-1\right)+3$ 的图象关于点 $(3, 3)$ 对称, 故 D 正确;

对于 C, 同上, 将 $x=-1$ 代入得 $t=-\frac{4}{3}$, $\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$ 显然不是 $f(t)+3$ 的图象的对称中心, 故 C 错误.

14. B 【解析】由题意知, 函数 $f(x)$ 的定义



域为 \mathbf{R} , 因为函数 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$,

$$\text{即 } \frac{a(-x)^2 + b(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + 1}, \text{ 即 } \frac{ax^2 - bx}{x^2 + 1} = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + 1}, \text{ 则 } b = 0,$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{ax^2}{x^2 + 1}, \text{ 又 } f(1) = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \frac{a}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } a = 1, \text{ 则 } f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

$$\text{因为 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } & f\left(\frac{1}{2\,025}\right) + f\left(\frac{1}{2\,024}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2\,025) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2\,025}\right) + f(2\,025) \right] + \left[f\left(\frac{1}{2\,024}\right) + f(2\,024) \right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) \right] + f(1) \\ &= 1 \times 2\,024 + \frac{1}{2} = \frac{4\,049}{2}. \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

15. ACD 【解析】由题知 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 在 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$ 中, 用 $-x$ 替换 x , 则 $2f(-x) + f(x^2 - 1) = 1$, 两式相减得 $2f(x) - 2f(-x) = 0$, 即可得 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 故 A 正确.

令 $x = \sqrt{2}$, 则 $2f(\sqrt{2}) + f(1) = 1$, 令 $x = 1$, 则 $2f(1) + f(0) = 1$, 令 $x = 0$, 则 $2f(0) + f(-1) = 1$, 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-1) = f(1)$, 所以 $2f(0) + f(1) = 1$, 故 $f(1) = f(0) = \frac{1}{3}$, 所以 $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$, 故 B 错误, C 正确.

 **提示:** 赋值法是求抽象函数的值的常用方法

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}, \text{ 注意到 } 2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$$

中两系数之和为 3, 若令 $f(x) = f(x^2 - 1)$, 则有 $3f(x) = 1$, 所以 $f(x) = \frac{1}{3}$,

$$\text{令 } x = x^2 - 1, \text{ 解得 } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 取 } x =$$



$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 则 $3f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$, 即

$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $f(\sqrt{2}) = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) =$

$\frac{1}{3}$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 上不

单调, 故 D 正确.

故选 ACD.

快解

对于 A, 由题可知, $f(x)$ 的定义

域为 \mathbf{R} , 由 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$,

知 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x^2 - 1) + \frac{1}{2}$, 而由函数

奇偶性的定义易知函数 $y = f(x^2 - 1)$

为偶函数, 所以 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x^2 - 1) +$

$\frac{1}{2}$ 为偶函数, 所以 A 正确.

16. $\frac{9}{8}$ 【解析】设 $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$,

$h(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}$ ($|a-b| < 1$).

$g(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0, x \neq$

$-1, x \neq -2\}$, $g(-2-x) = \frac{1}{-2-x} + \frac{1}{-2-x+1} +$

$\frac{1}{-2-x+2} = -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -g(x)$,

所以 $g(-2-x) + g(x) = 0$, 则函数 $g(x) =$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ 的图象关于点 $(-1, 0)$

对称.

$h(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq -a, x \neq$

$-b\}$, 若 $h(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}$ 的图象也关于

点 $(-1, 0)$ 对称,

则有 $h(x) + h(-2-x) = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} +$

$\frac{1}{-2-x+a} + \frac{1}{-2-x+b} = 0$,

即 $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x+2-a} + \frac{1}{x+2-b}$, 所以

$\begin{cases} a=2-a, \\ b=2-b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=2-a, \\ a=2-b, \end{cases}$

所以 $a=b=1$ 或 $a+b=2$ (显然 $a=b=1$ 也满足 $a+b=2$),

即当 $a+b=2$ 时, 函数 $h(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}$

的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称.



因为当 $a+b=2$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} +$

$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = g(x) + h(x)$, 所以

$f(-2-x) + f(x) = g(-2-x) + h(-2-x) +$

$g(x) + h(x) = 0$, 因此函数 $f(x) = \frac{1}{x} +$

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}$ 的图象关于点

$(-1, 0)$ 对称, 所以 $m = -1, n = 0$.

又 $|a-b| < 1, a+b=2$,

所以 $\begin{cases} |2-b-b| < 1, \\ |a-2+a| < 1, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2} < b < \frac{3}{2}, \end{cases}$

因此 $\frac{1}{4a} + \frac{1}{b} + mn = \frac{1}{4a} + \frac{1}{b}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{b} \right) (a+b)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{b}{4a} + \frac{a}{b} + 1 \right)$

$\geq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{b}{4a} \times \frac{a}{b}} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + 1 \right) = \frac{9}{8},$

当且仅当 $\frac{b}{4a} = \frac{a}{b}$, 即 $\begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$ 时, 等号

成立.

故 $\frac{1}{4a} + \frac{1}{b} + mn$ 的最小值为 $\frac{9}{8}$.

17. (1) 【证明】 $\because g(x) = \frac{5x+3}{x+1}, x \in (-\infty,$

$-1) \cup (-1, +\infty), \therefore g(-2-x) = \frac{5x+7}{x+1}.$

$\therefore g(x) + g(-2-x) = \frac{5x+3}{x+1} + \frac{5x+7}{x+1} = 10,$

即对任意的 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 都有 $g(x) + g(-2-x) = 10$ 成立.

\therefore 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(-1, 5)$ 对称.

(2) 【解】 $\because g(x) = \frac{5x+3}{x+1} = 5 - \frac{2}{x+1}$, 易知

$g(x)$ 在 $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ 上单调递增, \therefore 当 $x \in$

$\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ 时, $g(x) \in [-1, 4].$

记函数 $y = h(x), x \in [0, 2]$ 的值域为 A .



若对任意的 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in \left[-\frac{2}{3}, 1\right]$, 使得 $h(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则 $A \subseteq [-1, 4]$.

\therefore 当 $x \in [0, 1]$ 时, $h(x) = x^2 - mx + m + 1$,
 $\therefore h(1) = 2$, 即函数 $h(x)$ 的图象过对称中心 $(1, 2)$.

① 当 $\frac{m}{2} \leq 0$, 即 $m \leq 0$ 时, 函数 $h(x)$

在 $(0, 1)$ 上单调递增. 由对称性知 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, \therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增.

易知 $h(0) = m + 1$, 又 $h(0) + h(2) = 4$,
 $\therefore h(2) = 3 - m$, 则 $A = [m + 1, 3 - m]$.

由 $A \subseteq [-1, 4]$, 得
$$\begin{cases} -1 \leq m + 1, \\ 4 \geq 3 - m, \\ m \leq 0, \end{cases}$$
 解得

$-1 \leq m \leq 0$.

② 当 $0 < \frac{m}{2} < 1$, 即 $0 < m < 2$ 时, 函数 $h(x)$

在 $\left(0, \frac{m}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{m}{2}, 1\right)$ 上单调递增.

由对称性知 $h(x)$ 在 $\left(1, 2 - \frac{m}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(2 - \frac{m}{2}, 2\right)$ 上单调递减,

\therefore 函数 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{m}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{m}{2}, 2 - \frac{m}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(2 - \frac{m}{2}, 2\right)$ 上单调递减.

\therefore 结合对称性知 $A = [h(2), h(0)]$ 或 $A = \left[h\left(\frac{m}{2}\right), h\left(2 - \frac{m}{2}\right)\right]$.

$\therefore 0 < m < 2, \therefore h(0) = m + 1 \in (1, 3)$.

又 $h(0) + h(2) = 4, \therefore h(2) = 3 - m \in (1, 3)$.

易知 $h\left(\frac{m}{2}\right) = -\frac{m^2}{4} + m + 1 \in (1, 2)$.

又 $h\left(\frac{m}{2}\right) + h\left(2 - \frac{m}{2}\right) = 4$,

$\therefore h\left(2 - \frac{m}{2}\right) \in (2, 3)$.

\therefore 当 $0 < m < 2$ 时, $A \subseteq [-1, 4]$ 成立.

③ 当 $\frac{m}{2} \geq 1$, 即 $m \geq 2$ 时, 函数 $h(x)$

在 $(0, 1)$ 上单调递减.



由对称性知 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

\therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减.

易知 $h(0) = m + 1$, 又 $h(0) + h(2) = 4$,

$\therefore h(2) = 3 - m$, 则 $A = [3 - m, m + 1]$.

由 $A \subseteq [-1, 4]$, 得
$$\begin{cases} -1 \leq 3 - m, \\ 4 \geq m + 1, \\ m \geq 2, \end{cases}$$
 解得

$2 \leq m \leq 3$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $[-1, 3]$.

3.3 幂函数



对点上分

1. B 【解析】若函数 $f(x) = (n^2 + 3n - 3)x^n$ 为幂函数, 则 $n^2 + 3n - 3 = 1$, 解得 $n = 1$ 或 $n = -4$. 故“ $f(x)$ 是幂函数”是“ $n = -4$ ”的必要不充分条件. 故 B 正确.

2. D 【解析】设 $f(x) = x^\alpha$, 则 $f(2) = 2^\alpha = \frac{1}{2}$, 解得 $\alpha = -1$, 则 $f(x) = x^{-1}$, $f(5) = 5^{-1} = \frac{1}{5}$. 故选 D.

3. D 【解析】函数 $f(x)$ 为幂函数, 设 $f(x) = x^\alpha$, 因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 所以 $2^\alpha = \sqrt{2}$, 所以 $\alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $y = f(x) + f(2-x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$, 由 $y = f(x) + f(2-x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ 有意义, 可得
$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$$
 所以 $0 \leq x \leq 2$, 所以函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 的定义域为 $[0, 2]$. 故选 D.

4. C 【解析】对于 A, $f(x) = x^2$ 的值域为 $[0, +\infty)$, $g(x) = x^3$ 的值域为 \mathbf{R} , 故 A 错误; 对于 B, $f(x) = x^{-1}$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 的值域为 $(0, +\infty)$, 故 B 错误;

对于 C, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 故 C 正确;

对于 D, $f(x) = x^{-1}$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) = x^3$ 的值域为 \mathbf{R} , 故 D 错误. 故选 C.



5. $\left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$ 【解析】当 $\alpha = -1$ 时, $y =$

$\frac{1}{x}$, 其定义域和值域均为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 符合题意.

当 $\alpha = 0$ 时, $y = x^0$,

提示: $y = x^0$ 的图象是一条与 x 轴平行的直线去掉点 $(0, 1)$

其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域为 $\{1\}$, 不符合题意.

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $y = \sqrt{x}$, 其定义域和值域均为 $[0, +\infty)$, 符合题意.

当 $\alpha = 1$ 时, $y = x$, 其定义域和值域均为 \mathbf{R} , 符合题意.

当 $\alpha = 2$ 时, $y = x^2$, 其定义域为 \mathbf{R} , 值域为 $[0, +\infty)$, 不符合题意.

当 $\alpha = 3$ 时, $y = x^3$, 其定义域和值域均为 \mathbf{R} , 符合题意.

综上, 集合 $C = \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$.

6. B 【解析】函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图象过点 $(1, 1)$, 故 A, D 错误;

当 $x > 0$ 时, 函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 图象的增长速度逐渐变慢, 故 C 错误, B 正确.

7. C 【解析】若 $\alpha = -1$, 则 $y = x^{-1}$ 的图象不过原点, A 错误;

对于幂函数 $y = x^\alpha$, 当 $x > 0$ 时, $x^\alpha > 0$ 恒成立, 因此幂函数的图象不过第四象限, B 错误;

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$,

定义域不关于原点对称, 故 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 为非奇非偶函数, C 正确;

当 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时, $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图象过第一、三象限, D 错误. 故选 C.

8. B 【解析】由题图可知幂函数 $y = x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y = x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $n < 0, m > 0$.

因为 $y = x^m$ 的图象的增长速度越来越慢, 所以 $m < 1$.

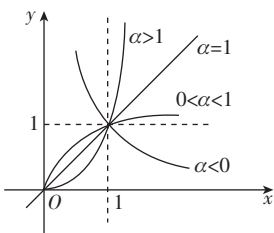
因为当 $x > 1$ 时, $y = x^n$ 的图象在 $y = x^{-1}$ 的图象的下方, 所以 $n < -1$.

综上, $0 < m < 1, n < -1$, 故 B 正确.

**二级结论** 幂函数图象的分布规律

幂函数图象的分布规律可用“一全有、二一偶、三一奇、四全无”来说明.

(1)“一全有”:首先确定第一象限的图象(所有幂函数的图象在第一象限都出现),分布情况如图所示,其中,在直线 $x=1$ 的右侧, α 越大,图象越高,越趋向于直线 $x=1$; α 越小,图象越低,越趋向于 x 轴.



(2)“二一偶”:经过第二、一象限的幂函数为偶函数.

(3)“三一奇”:经过第三、一象限的幂函数为奇函数.

(4)“四全无”:幂函数的图象一定不经过第四象限.

9. D 【解析】因为 $y = (a^2 - 2a - 2)x^a$ 为幂函数,所以 $a^2 - 2a - 2 = 1$,解得 $a = 3$ 或 $a = -1$.

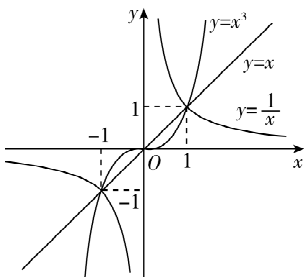
若 $a = 3$,则 $y = x^3$ 的图象与一次函数 $y = x$ 的图象有三个交点,符合题意;

若 $a = -1$,则 $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 的图象与一次函数

$y = x$ 的图象有两个交点,不符合题意.

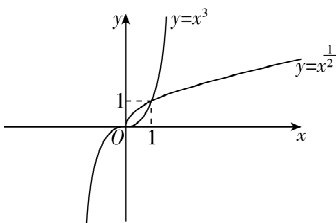
综上所述, $a = 3$.

故选 D.



10. (0, 1) 【解析】 $f(x) = x^3 - x^{\frac{1}{2}} < 0$,

即 $x^3 < x^{\frac{1}{2}}$,作出 $y = x^3$ 和 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的大致图象,如图所示,由图可知, $x \in (0, 1)$.



11. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} m^2 - m - 1 = 1, \\ m^2 + m - 3 > 0, \end{cases}$ 解

得 $m = 2$. 故选 C.

12. A 【解析】幂函数 $y = x^{0.5}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $c = 1 = 1^{0.5}$, 又因为 $1.01 > 1 > 0.99$, 所以 $b > c > a$, 故 A 正确.

方法总结 幂值大小比较的常用方法

三种方法	直接法	当幂指数相同时, 直接利用幂函数的单调性来比较大小
	转化法	当幂指数不同时, 可以先转化为相同的幂指数, 再运用函数的单调性比较大小
	中间量法	当底数不同, 幂指数也不同且不能运用单调性比较大小时, 可选取适当的中间值与两数分别比较, 从而达到比较大小的目的

13. D 【解析】因为函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调, 由 $y = x^2 - 2ax + a + 2$ 在 $(-\infty, 1]$ 上不可能单调递增, 知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不可能单调递增, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减.

$$\text{所以} \begin{cases} 1 \leq a, \\ 2a - 6 < 0, \\ 1 - 2a + a + 2 \geq 1^{2a-6}, \end{cases} \quad \text{解得 } 1 \leq a \leq 2,$$

所以实数 a 的取值范围是 $[1, 2]$. 故 D 正确.

14. D 【解析】设 $f(x) = x^\alpha$, 因为幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \frac{1}{2})$, 所以 $2^\alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\alpha = -1$, 所以 $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 所以不等式 $f(3 - 2m) < 1$ 可化为 $f(3 - 2m) < f(1)$.

又函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $3 - 2m < 0$ 或 $3 - 2m > 1$, 即 $m > \frac{3}{2}$ 或 $m < 1$, 故选 D.

15. BD 【解析】对于 A, 设幂函数解析式为 $y = x^a$, 因为幂函数的图象经过点 $(\frac{1}{8}, 2)$, 所以 $(\frac{1}{8})^a = 2$, 解得 $a = -\frac{1}{3}$, 所以解析式为 $y = x^{-\frac{1}{3}}$, 故 A 错误;



对于 B, 幂函数 $y=x^a (a>0)$ 的图象始终经过点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 故 B 正确;

对于 C, 当 $0<x<1$ 时, $x^{-\frac{4}{3}}>0, x^{-\frac{5}{4}}>0$, 因为 $\frac{x^{-\frac{5}{4}}}{x^{-\frac{4}{3}}}=x^{\frac{1}{12}}<1^{\frac{1}{12}}=1$, 所以 $x^{-\frac{5}{4}}<x^{-\frac{4}{3}}$, 即

当 $0<x<1$ 时, 函数 $y=x^{-\frac{4}{3}}$ 的图象始终在函数 $y=x^{-\frac{5}{4}}$ 的图象的上方, 故 C 错误;

对于 D, 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$,

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2} \geq 0,$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}} \geq 0,$$

$$\text{因为 } \left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2 - \left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}{4} - \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$= -\frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{4}$$

$$= -\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{4} \leq 0,$$

所以 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, 故 D 正

确. 故选 BD.

16. $(-\infty, 4]$ 【解析】函数 $f(x)$ 为幂函数,

则 $2a^2-3a+2=1$, 即 $(2a-1)(a-1)=0$,

因为 $a \neq 1$, 所以 $a = \frac{1}{2}$, 得 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} =$

\sqrt{x} , 则函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

由不等式 $(m+2) \cdot f(x) - x \leq m+5$,

得 $(m+2)\sqrt{x} - x \leq m+5$, 令 $t = \sqrt{x}$, 由 $x \geq 1$, 得 $t \geq 1$,

不等式变为 $(m+2)t - t^2 \leq m+5 (t \geq 1)$,

得 $m(t-1) \leq t^2 - 2t + 5$.

当 $t=1$ 时, 上式恒成立.

当 $t>1$ 时, $m \leq \frac{t^2-2t+5}{t-1}$, 而 $\frac{t^2-2t+5}{t-1} = t -$

$1 + \frac{4}{t-1} \geq 2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{4}{t-1}} = 4$, 当且仅当

$t-1 = \frac{4}{t-1}$, 即 $t=3$ 时, 等号成立, 则

$m \leq 4$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 4]$.

17. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ 【解析】幂函



数 $y = x^{m^2-2m-3} (m \in \mathbf{N})$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $m^2 - 2m - 3 < 0$, 解得 $-1 < m < 3$.

又 $m \in \mathbf{N}$, 故 $m = 0, 1, 2$.

当 $m = 0$ 时, $y = x^{-3}$ 的图象不关于 y 轴对称, 舍去;

当 $m = 1$ 时, $y = x^{-4}$ 的图象关于 y 轴对称, 满足;

当 $m = 2$ 时, $y = x^{-3}$ 的图象不关于 y 轴对称, 舍去.

故 $m = 1$, 不等式化为 $(a+1)^{-1} < (3-2a)^{-1}$, 结合函数 $y = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递减,

可知 $a+1 > 3-2a > 0$ 或 $0 > a+1 > 3-2a$ 或 $a+1 < 0 < 3-2a$, 解得 $a < -1$ 或 $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$.

易错警示 忽略幂函数图象不连续的情况而致错

幂函数 $y = x^{-1}$ 的图象不连续, 在两段区间上分别单调递减, 此时由 $(a+1)^{-1} < (3-2a)^{-1}$ 进行等价转化时, 要考虑 $3-2a$ 与 $a+1$ 都大于 0、都小于 0 或者一正一负三种情况, 不要漏解.

18. 【解】 (1) 由题意得 $\begin{cases} a^2+a-1=1, \\ a>0, \end{cases}$ 解得

$a = 1$, 则 $f(x) = x$.

(2) $g(x) = x \cdot f(x) - 2mx + 2m = x^2 - 2mx + 2m$, 其图象的对称轴为直线 $x = m$.

当 $m \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $g(0) = 2m$, 则 $2m = -2$, 即 $m = -1$;

当 $0 < m < 2$ 时, $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $g(m) = -m^2 + 2m$, 则 $-m^2 + 2m = -2$, 即 $m = 1 + \sqrt{3}$ (舍去) 或 $m = 1 - \sqrt{3}$ (舍去);

当 $m \geq 2$ 时, $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $g(2) = 4 - 2m$, 则 $4 - 2m = -2$, 即 $m = 3$.

综上所述, $m = -1$ 或 $m = 3$.

19. 【解】 (1) 由幂函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增知 $4m - m^2 > 0$, 解得 $0 < m < 4$, 又因为 $m \in \mathbf{Z}$, 所以 $m = 1$ 或 $m = 2$ 或 $m = 3$.

当 $m = 1$ 或 $m = 3$ 时, $f(x) = x^3$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 不符合题意;



当 $m=2$ 时, $f(x)=x^4$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意.

综上, $m=2, f(x)=x^4$.

(2) 由偶函数 $f(x)=x^4$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

由 $f(a+2) < f(1-2a)$, 知 $|a+2| < |1-2a|$, 即 $a^2+4a+4 < 4a^2-4a+1$, 所以 $3a^2-8a-3 = (3a+1)(a-3) > 0$, 可得 $a < -\frac{1}{3}$ 或 $a > 3$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$.



能力上分

1. B 【解析】由①②可得 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

对于 A, $f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 不可能为奇函数, 故 A 错误;

对于 B, $f(x)=x^3$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$, 故 $f(x)=x^3$ 为奇函数,

 **提示:** 指数为奇数的幂函数为奇函数, 指数为偶数的幂函数为偶函数

根据幂函数的性质可得 $f(x)=x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 正确;

对于 C, 根据幂函数的性质可得 $f(x)=x^{-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 错误;

对于 D, $f(x)=x^2$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, 故 $f(x)=x^2$ 为偶函数, 故 D 错误. 故选 B.

2. D 【解析】由题图可知, C_1 在第一象限内单调递减, 则指数 α 的值满足 $\alpha < 0$;
 C_2 在第一象限内单调递增, 且图象呈现上凸趋势, 则指数 α 的值满足 $0 < \alpha < 1$;
 C_3 在第一象限内单调递增, 且图象呈现下凸趋势, 则指数 α 的值满足 $\alpha > 1$. 故选 D.

3. C 【解析】 $y=x^3, y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 若存在实数 t , 使得方程 $f(x)=t$ 有两个不同的正实数根, 则只需 $m^2 > m^3$, 又 $m > 0$, 故 $0 < m < 1$. 故选 C.

4. C 【解析】由 $f(x)=(m^2-m-1)x^m$ 是幂



函数, 得 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$.

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x)$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 此时乙和丙的论述是错误的, 甲的论述是正确的, 故 $m = -1$ 不符合题意;

当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^2$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时乙和丙的论述是正确的, 甲的论述是错误的, 故 $m = 2$ 符合题意.

综上所述, m 的值为 2, 故选 C.

5. A 【解析】令 $g(x) = f(x) - 1 = \sqrt[3]{x} + x$, 因为 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $g(-x) = \sqrt[3]{-x} + (-x) = -\sqrt[3]{x} - x = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称.

函数 $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$ 都是 \mathbf{R} 上的增函数, 所以 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 而 $f(1-m) + f(2m) > 2 \Leftrightarrow f(1-m) - 1 > -[f(2m) - 1] \Leftrightarrow g(1-m) > -g(2m) = g(-2m)$, 所以 $1-m > -2m$, 解得 $m > -1$.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(-1, +\infty)$. 故 A 正确.

6. BD 【解析】对于①, 对于定义域内的任意 x , 有 $f(-x) = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是奇函数.

对于②, 不妨设 $x_1 < x_2$, 由题意可得 $f(x_1) > f(x_2)$, 则函数 $f(x)$ 在定义域内单调递减.

对于 A, 易知函数 $f(x) = x^2$ 为偶函数, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $f(x) = -x^3$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 易知函数 $f(x) = -x^3$ 在定义域内单调递减, 故 B 正确;

对于 C, 由反比例函数的性质可知 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -(-x)^2, & -x > 0 \end{cases} =$



$$\begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ -x^2, x < 0 \end{cases} = -f(x), \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 是奇}$$

函数, 易知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 故 D 正确. 故选 BD.

7. (0, 2) 【解析】因为函数 $f(x) = (m^2 - m - 1) \cdot x^{\frac{m}{3}}$ 是幂函数, 所以 $m^2 - m - 1 = 1$, 所以 $m^2 - m - 2 = (m - 2)(m + 1) = 0$, 所以 $m = 2$ 或 $m = -1$.

又因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $m > 0$, 所以 $m = 2$, 所以 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = (-x)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

因为 $f(x + 1) > f(2x - 1)$, 所以 $f(|x + 1|) > f(|2x - 1|)$, 所以 $|x + 1| > |2x - 1|$, 所以 $|x + 1|^2 > |2x - 1|^2$, 解得 $0 < x < 2$, 所以所求解集为 $(0, 2)$.

8. < 【解析】因为函数 $f(x)$ 是幂函数, 所以 $m^2 - m - 1 = 1$, 即 $m^2 - m - 2 = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$.

当 $m = -1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$; 当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^5$.

因为函数 $f(x)$ 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 满足 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) = x^5$. 因为 $f(x) = x^5$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$, 所以函数 $f(x) = x^5$ 是奇函数.

因为 $f(a) + f(b) < 0$, 所以 $f(a) < -f(b) = f(-b)$, 所以 $a < -b$, 即 $a + b < 0$.

9. 【解】(1) 由函数 $f(x) = (m^2 - m + 1)x^{m - \frac{1}{2}}$ 是幂函数, 得 $m^2 - m + 1 = 1$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 1$.

当 $m = 0$ 时, 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不满足 $f(2) < f(3)$, 不符合题意;

当 $m = 1$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 满足 $f(2) < f(3)$, 符合题意.

所以 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$.

(2) 假设存在实数 n , 使得 $g(x)$ 的最小值为 -13 .



由(1)得 $g(x) = n\sqrt{2x-1} + 2x - 5$ ($\frac{5}{2} \leq x \leq 13$), 由 $\frac{5}{2} \leq x \leq 13$ 得 $2 \leq \sqrt{2x-1} \leq 5$, 令 $t = \sqrt{2x-1}$, $h(t) = nt + t^2 + 1 - 5 = t^2 + nt - 4$, $t \in [2, 5]$, 则 $h(t)$ 的最小值为 -13.

当 $-\frac{n}{2} \leq 2$, 即 $n \geq -4$ 时, $h(t)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递增, $h(t)_{\min} = h(2) = 2n - 13$, 解得 $n = -\frac{13}{2} < -4$, 矛盾;

当 $2 < -\frac{n}{2} < 5$, 即 $-10 < n < -4$ 时, $h(t)_{\min} = h(-\frac{n}{2}) = -\frac{n^2}{4} - 4 = -13$, 则 $n = -6$;

当 $-\frac{n}{2} \geq 5$, 即 $n \leq -10$ 时, $h(t)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减, $h(t)_{\min} = h(5) = 5n + 21 = -13$, 解得 $n = -\frac{34}{5} > -10$, 矛盾.

所以存在实数 n , 使得 $g(x)$ 的最小值为 -13, n 的值为 -6.

3.4 函数的应用(一)



对点上分

1. D 【解析】设从甲仓库调往 A 县的车辆数为 x , 则从甲仓库调往 B 县的车辆数为 $12-x$, 从乙仓库调往 A 县的车辆数为 $10-x$, 从乙仓库调往 B 县的车辆数为 $6-(10-x) = x-4$.

设总费用为 y , 则 $y = 40x + 80 \times (12-x) + 30 \times (10-x) + 50 \times (x-4) = 1060 - 20x$ ($4 \leq x \leq 10, x \in \mathbf{N}$), 要使总费用 y 最少, 则需 x 最大, 所以当 $x = 10$ 时, 总费用 y 最少, 为 860 元.

2. A 【解析】当 $0 \leq t \leq 3$ 时, $y = \frac{6}{3}t = 2t$, 当 $3 < t \leq 12$ 时, 设 $y = kt + b$, 将 $(3, 6), (12, 0)$

的坐标分别代入可得 $\begin{cases} 6 = 3k + b, \\ 0 = 12k + b, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} k = -\frac{2}{3}, \\ b = 8, \end{cases} \text{ 所以 } y = -\frac{2}{3}t + 8,$$

$$\text{所以 } y = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 3, \\ -\frac{2}{3}t + 8, & 3 < t \leq 12. \end{cases}$$

$$\text{要使 } y \geq 4, \text{ 则 } \begin{cases} 2t \geq 4, \\ 0 \leq t \leq 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -\frac{2}{3}t + 8 \geq 4, \\ 3 < t \leq 12, \end{cases}$$

解得 $2 \leq t \leq 3$ 或 $3 < t \leq 6$.

综上所述, $2 \leq t \leq 6$, 所以有效治疗所持续的时长为 $6 - 2 = 4$ (小时). 故选 A.

3. C 【解析】汽车行驶的公里数与耗油量成正比, 是一次函数关系, 故 A 错误;

设原来的人口数是 a , x 年后的人口数是 y , 则 $y = a(1 + 1\%)^x$, 不是二次函数关系, 故 B 错误;

竖直向上发射的信号弹, 从发射到落回地面, 信号弹的高度与时间的关系 (不计空气阻力), 根据物理知识可知是二次函数关系, 故 C 正确;

在核电站中, 作为核燃料的某放射性元素裂变后所剩的原子数随使用时间的变化关系, 应是递减的, 不是二次函数关系, 故 D 错误.

4. D 【解析】由题意, 若把材料全部用完, 则两间禽舍的总长度为 $(36 - 3x)$ m, $0 < x < 12$, 设所建造的禽舍总面积为 y m², 则 $y = (36 - 3x) \cdot x = -3x^2 + 36x = -3(x - 6)^2 + 108$, 所以当所建造的禽舍总面积最大时, 禽舍的宽为 6 m. 故选 D.

5. B



攻略上分

依据已知条件列出的函数关系式中含有典型的对勾函数 $y = x + \frac{10\,000}{x}$, 运用攻略中的结论, 即可求解.

【解析】依题意, $x > 0$, 每吨的平均处理成本 $\frac{y}{x} = 2 \left(x + \frac{10\,000}{x} \right) - 180 \geq 2 \times 2\sqrt{10\,000} - 180 = 220$, 当且仅当 $x = \frac{10\,000}{x}$, 即 $x = 100$ 时取等号,

所以当月处理量为 100 吨时, 可以使每吨的平均处理成本最低. 故选 B.

6. AC 【解析】依题意可设 $v = kr^4$, k 为常数.

当气体在半径为 5 cm 的管道中时, 其流量为 1 250 cm³/s, 所以 $1\,250 = k \times 5^4$, 解得 $k = 2$, 则 $v = 2r^4$.

当 $r = 3$ cm 时, $v = 162$ cm³/s, 故 A 正确, B

错误.

由 $2r^4 \geq 512$, 解得 $r \geq 4$ cm, 故 C 正确, D 错误. 故选 AC.

7.7 700 【解析】因为长方体沼气池的体积为 50 立方米, 深为 2 米, 所以长方体沼气池的底面面积为 25 平方米.

设长方体沼气池底面一条边的长为 x 米, $x > 0$, 则另一条边的长为 $\frac{25}{x}$ 米, 所以池壁的面积为 $\left(2x + 2 \times \frac{25}{x}\right) \times 2 = 4x + \frac{100}{x}$ (平方米).

设沼气池的总造价为 y 元, 则 $y = \left(4x + \frac{100}{x}\right) \times 80 + 100 \times 25 + 2\,000 = \left(x + \frac{25}{x}\right) \times 320 + 4\,500$, 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{25} = 10$, 当且仅当 $x = 5$ 时, 等号成立, 所以当长方体沼气池底面为边长为 5 米的正方形时, 沼气池的总造价最低, 最低总造价为 7 700 元.

8. B 【解析】设前 3 天共买了 m 盒, 第 4 天到第 8 天共买了 n 盒, 则 $26m + 22n + 4 \times 18 = 212$, 整理得 $n = \frac{70 - 13m}{11}$.

因为 m, n 均为非负整数, 所以 $70 - 13m = 0$ 或 $70 - 13m$ 是 11 的整数倍, 当 $m = 2$ 时, $n = 4$, 得 $m + n = 6$, 故前 8 天一共买了 6 盒. 故选 B.

9. B 【解析】因为茶水温度 y (单位: $^{\circ}\text{C}$) 和泡茶时间 t (单位: min) 满足关系式 $y =$

$$\begin{cases} -5t + 70, & 0 < t \leq 5, \\ \frac{200}{t} + 5, & 5 < t \leq 10, \end{cases} \quad \text{且喝茶的最佳口感水}$$

温大约是 60°C , 所以当 $0 < t \leq 5$ 时, 由 $-5t + 70 = 60$, 可得 $t = 2$, 符合题意; 当 $5 < t \leq 10$ 时, 由 $\frac{200}{t} + 5 = 60$, 解得 $t = \frac{40}{11}$, 舍去.

故泡茶后需要等待的时间为 2 min. 故选 B.

10. 【解】(1) 由题可知, $W(x) = xG(x) - 50 -$

$$100x = \begin{cases} -50 + 80x - x^2, & 0 < x \leq 20, \\ -20x + 1\,950 - \frac{8\,000}{x-1}, & x > 20. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x \leq 20$ 时, $W(x) = -50 +$



$$80x - x^2 = -(x-40)^2 + 1\,550,$$

易知在 $(0, 20]$ 上 $W(x)$ 单调递增, 所以

当 $x = 20$ 时, $W(x)$ 取最大值 1 150.

当 $x > 20$ 时, $W(x) = -20x + 1\,950 -$

$$\frac{8\,000}{x-1} = -20 \left[(x-1) + \frac{400}{x-1} \right] + 1\,930 \leq$$

$$-20 \times 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{400}{x-1}} + 1\,930 = 1\,130,$$

当且仅当 $x-1 = \frac{400}{x-1}$, 即 $x = 21$ 时, 等号

成立, 所以当 $x = 21$ 时, $W(x)$ 取最大值

1 130.

因为 $1\,150 > 1\,130$, 所以当 $x = 20$ 时,

$W(x)_{\max} = 1\,150$, 即当年产量为 20 万台

时, 该公司获得的年利润最大, 最大年

利润为 1 150 万元.

11. D 【解析】由丙图可知, 从零点到三点该水池每小时增加的水量为 2, 因此两个进水口同时打开, 且出水口没有打开, 故①正确;

从三点到四点蓄水量由 6 降到 5, 即一个小时减少的水量为 1, 因此需要打开一个进水口, 一个出水口, 故②错误;

从四点到六点蓄水量不变, 且题设要求至少打开一个水口, 所以需要打开两个相同的进水口和一个出水口, 故③错误.

12. C 【解析】由题意可知, 当 $0 \leq t \leq 1$

$$\text{时, } f(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 2t = t^2;$$

$$\text{当 } 1 < t \leq 2 \text{ 时, } f(t) = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} + (t-1) \cdot 2 = 2t-1.$$

$$\text{所以 } f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2t-1, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

结合不同段上函数的图象可知选 C.

专题上分 4 抽象函数

1. A 【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 3]$,

令 $1 \leq 3x-2 \leq 3$, 解得 $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$, 所

以 $f(3x-2)$ 的定义域为 $\left[1, \frac{5}{3}\right]$. 由分母

不为 0, 得 $2x-3 \neq 0$, 即 $x \neq \frac{3}{2}$, 所以函数

$g(x)$ 的定义域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right]$,

故选 A.

易错警示 求复合函数的定义域时, 不明确自变量和定义域的关系而致错

已知 $f(x)$ 的定义域, 求 $f(g(x))$ 的定义域, 首先明确 $f(x)$ 的定义域, 假设为 $[a, b]$, 然后由不等式 $a \leq g(x) \leq b$, 可得到 x 的取值范围, 即 $f(g(x))$ 的定义域. 注意函数 $f(g(x))$ 的自变量是 x , 不是 $g(x)$.

- 2. ACD** 【解析】对于 A: 令 $x=y=0$, 则 $f(0)+[f(0)]^2=0$, 解得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=-1$, 因为函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0)$, 所以 $f(0)=-1$, 故 A 正确;
- 对于 B: 令 $x=1, y=0$, 则 $f(2)+[f(1)]^2=0$, 即 $f(2)=-[f(1)]^2$, 令 $x=2, y=0$, 则 $f(4)+[f(2)]^2=0$, 即 $f(4)+[f(1)]^4=0$, 故 B 错误;
- 对于 C: 令 $x=0$, 则 $f(0)+f(y)f(-y)=0$, 所以 $f(y)f(-y)=1$, 即 $f(x)f(-x)=1$, 故 C 正确;
- 对于 D: 因为 $f(x)<0$, 所以 $-f(x)>0$, $-f(-x)>0$, 所以 $-f(x)+[-f(-x)] \geq 2\sqrt{f(x)f(-x)}=2$, 当且仅当 $f(x)=f(-x)=-1$ 时取等号, 又 $f(0)=-1$, 故等号可取到, 所以 $f(x)+f(-x) \leq -2$, 故 D 正确. 故选 ACD.

- 3. A** 【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(a-1)=f(1-a)$,

 **提示**: 观察到 $a-1, 1-a$ 互为相反数是解答本题的突破点

令 $1-a$ 为 x , 可得 $f(-x)=f(x)$, 可知 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-2)=f(2)$, $f(-1)=f(1)$, 又因为 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(2)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f(1)$, 即 $f(-2)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f(-1)$, 故 A 正确, C 错误;

因为不知道 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的单调性, 所以无法判断 B, D 选项. 故选 A.

- 4. ①③** 【解析】因为 $f(1+x)+f(1-x)=2$, $g(1+x)+g(1-x)=2$, 设 $h(x)=f(x)-g(x)$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $h(1+x)+h(1-x)=0$, 所



以 $h(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 即①正确;

设 $\varphi(x) = f(x) + g(x) (x \in \mathbf{R})$, 则 $\varphi(1+x) + \varphi(1-x) = 4$, 所以 $\varphi(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 即②错误;

设 $F(x) = |f(x) - g(x)| (x \in \mathbf{R})$, 由①可知 $F(x) = |h(x)|$, 又 $h(1+x) + h(1-x) = 0$, 所以 $h(1+x) = -h(1-x)$, 所以 $F(1+x) = F(1-x)$, 所以 $F(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 即③正确;

设 $G(x) = |f(x) + g(x)| (x \in \mathbf{R})$, 由②可知 $G(x) = |\varphi(x)|$, 又 $\varphi(1+x) + \varphi(1-x) = 4$, 所以 $\varphi(1+x) = 4 - \varphi(1-x)$, 所以推不出 $G(1+x) = G(1-x)$ 一定成立, 所以 $G(x)$ 的图象不一定关于直线 $x=1$ 对称, 即④错误. 故答案为①③.

5. D 【解析】将 $f(x-1)$ 的图象向左平移 1 个单位长度可得 $f(x)$ 的图象, 由函数 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称, 故 $f(x)$ 为偶函数.

由 $f(x+2) = -f(x) + 2$, 得 $f(x+2+2) = -f(x+2) + 2 = f(x)$, 可知 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数, 所以 $f(2\ 025) = f(1+4 \times 506) = f(1) = f(-1)$,

 **点拨:** 求自变量的值较大的函数值时通常要用到周期性

由 $f(x+2) = -f(x) + 2$, 令 $x = -1$, 可得 $f(1) = -f(-1) + 2 = -f(1) + 2$, 则 $f(1) = 1$, 所以 $f(2\ 025) = 1$. 故选 D.

6. ACD 【解析】 $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+1)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到 $f(x)$ 的图象, 则 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称且 $f(1) = 0$, 故 A 正确.

由 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 可知 $f(x) + f(-x+2) = 0$, 由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 可知 $f(x) = f(-x+4)$, 则 $f(x) = -f(-x+2) = f(-x+4) = -f(-x+6)$, 则 $f(-x+2) = f(-x+6)$, 则 $f(x+2) = f(x+6)$, 故 $f(x)$ 是周期为 4 的函数, 故 C 正确.

$f(2\ 025) = f(2\ 025 - 4 \times 506) = f(1) = 0$, 故 D 正确.

由题中所给条件推不出 $f(x)$ 为奇函数,



故 B 错误. 故选 ACD.

7. C 【解析】由 $f(x+2)$ 为偶函数, 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 则 $f(-x+2)=f(x+2)$.

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$, 则 $f(-x+2)=-f(x-2)$, 所以 $f(x+2)=-f(x-2)$, 所以 $f(x-2)=-f(x-6)$, 故 $f(x+2)=f(x-6)$, $f(x)$ 的周期为 8.

因为区间 $[0, 2]$ 上的任意 x_1, x_2 , 都有

$$\frac{f(x_1+4)-f(x_2+4)}{x_2-x_1} > 0, \quad \text{所以}$$

$$\frac{f(x_1+4)-f(x_2+4)}{(x_1+4)-(x_2+4)} < 0, \quad \text{令 } g(x)=f(x+4), x \in [0, 2], \text{ 则 } g(x)=f(x+4) \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上单调递减, 故 } f(x) \text{ 在 } [4, 6] \text{ 上单调递减.}$$

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-6, -4]$ 上单调递减.

又 $f(x)$ 的周期为 8, 故 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 在 $[2, 6]$ 上单调递减,

又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 的周期为 8, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(-2)=-8$.

不等式 $f(x) \geq 6a^2 - 19a$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 故 $6a^2 - 19a \leq -8$, 解得 $\frac{1}{2} \leq$

$$a \leq \frac{8}{3}.$$

当 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 时, $[a] = 0$; 当 $1 \leq a < 2$

时, $[a] = 1$; 当 $2 \leq a \leq \frac{8}{3}$ 时, $[a] = 2$.

故 $[a]$ 的最大值为 2. 故选 C.

8. (1) 【证明】 对于 $f(x)+f(y)=f(x+y)$, $x \in \mathbf{R}$, 令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=0$, 再令 $y=-x$, 可得 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$, 即 $f(-x)=-f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数.

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, $f(x_2 - x_1) > 0$,

$$\begin{aligned} \text{由 } f(x_1) - f(x_2) &= f(x_1) - f(x_1 + x_2 - x_1) \\ &= f(x_1) - [f(x_1) + f(x_2 - x_1)] = -f(x_2 - x_1) < 0, \end{aligned}$$

可得 $f(x_1) < f(x_2)$, 故函数 $f(x)$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增.



(2)【解】因为 $g(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数, 所以当 $x \in [-1, 1]$ 时, $g(-x) = g(x)$.

由 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) + g(x) = -x^2 + x + 1$ ①,

可得 $f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) = -x^2 - x + 1$ ②,

由①②得 $2f(x) = 2x$, $2g(x) = -2x^2 + 2$, 则 $f(x) = x$,

因为 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x$, 所以当 $x \in (1, 2]$ 时, $x-1 \in (0, 1]$,

由 $f(x) + f(y) = f(x+y)$, 令 $y = -1$, 可得 $f(x) = f(x-1) - f(-1) = x-1 - (-1) = x$;

当 $x \in [-2, -1)$ 时, $-x \in (1, 2]$, 故 $f(x) = -f(-x) = x$.

综上, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) = x$.

当 $x \in [-1, 1]$ 时, $g(x) = -x^2 + 1$, 且 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的图象关于点 $(1, 0)$ 对称,

所以当 $x \in (1, 2]$ 时, $2-x \in [0, 1)$, $g(x) = -g(2-x) = -[-(2-x)^2 + 1] = x^2 - 4x + 3$;

又 $g(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数, 故当 $x \in [-2, -1)$ 时, $-x \in (1, 2]$, $g(x) = g(-x) = x^2 + 4x + 3$.

综上, 当 $x \in [-2, 2]$ 时,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \in [-2, -1), \\ -x^2 + 1, & x \in [-1, 1], \\ x^2 - 4x + 3, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

方法总结

探究抽象函数题的常用方法是赋值法, 一般地, 抽象函数所满足的关系式, 应看作给定的运算法则, 则变量的赋值或变量与数值的分解、组合都应尽量与所给关系式及所求的结果相关联, 寻找并运用函数的周期性、奇偶性、单调性解题.

真题上分

1. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ 【解析】因为 $f(x) =$

$$\frac{1}{x} + \sqrt{1-x}, \text{ 所以 } \begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } x \in$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

2. $\frac{37}{28} \quad 3+\sqrt{3}$ 【解析】 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 +$



$$2 = \frac{7}{4}, f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{4}{7} - 1 = \frac{37}{28}, \text{ 所以}$$

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{37}{28}.$$

当 $x \leq 1$ 时, 由 $1 \leq f(x) \leq 3$, 可得 $1 \leq -x^2 + 2 \leq 3$, 所以 $-1 \leq x \leq 1$;

当 $x > 1$ 时, 由 $1 \leq f(x) \leq 3$, 可得 $1 \leq x + \frac{1}{x} - 1 \leq 3$, 所以 $1 < x \leq 2 + \sqrt{3}$.

故 $1 \leq f(x) \leq 3$ 等价于 $-1 \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$, 所以 $[a, b] \subseteq [-1, 2 + \sqrt{3}]$, 所以 $b - a$ 的最大值为 $3 + \sqrt{3}$.

3. B 【解析】 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}.$

对于 A 选项, $f(x-1) - 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1} \right] - 1 = \frac{2}{x} - 2$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 为非奇非偶函数, 不符合题意;

对于 B 选项, $f(x-1) + 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1} \right] + 1 = \frac{2}{x}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 则函数 $y = \frac{2}{x}$ 为奇函数, 符合题意;

对于 C 选项, $f(x+1) - 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1} \right] - 1 = \frac{2}{x+2} - 2$, 定义域为 $\{x | x \neq -2\}$, 为非奇非偶函数, 不符合题意;

对于 D 选项, $f(x+1) + 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1} \right] + 1 = \frac{2}{x+2}$, 定义域为 $\{x | x \neq -2\}$, 为非奇非偶函数, 不符合题意. 故选 B.

快解

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}.$$

函数 $f(x)$ 的图象是由 $y = \frac{2}{x}$ 的图

象向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度得到的, 则其对称中心为 $(-1, -1)$. 结合选项知 $f(x-1) + 1$ 图象的对称中心为 $(0, 0)$, 故选 B.



- 4. A** 【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f(-x) = \frac{|x^2-1|}{-x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 所以排除 C, D; 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 所以排除 B, 故选 A.

快解

当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$. 观察四个选项, 可知只有 A 满足题意, 故选 A.

- 5. B** 【解析】由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 知 $f(3) > f(2) + f(1) = 3$, $f(4) > f(3) + f(2) > 3 + 2 = 5$, $f(5) > f(4) + f(3) > 5 + 3 = 8$, $f(6) > f(5) + f(4) > 8 + 5 = 13$, 以此类推, 得到 $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) > 3, f(4) > 5, f(5) > 8, f(6) > 13, \dots$, 即 $1, 2, > 3, > 5, > 8, > 13, \dots$, 则 $f(10) > 89, f(16) > 1\,597$, 所以 $f(20) > f(16) > 1\,597$, 故 B 正确, A 错误; 由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 知 $f(x)$ 取比 $f(x-1) + f(x-2)$ 大的数即可, 所以 $f(x)$ 无最大值, 故 C, D 错误. 故选 B.

- 6. A** 【解析】在 $f(x+y) + f(x-y) = f(x) \cdot f(y)$ 中, 令 $y = 1$, 得 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1)$, 所以 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)$ ①, 所以 $f(x+2) + f(x) = f(x+1)$ ②.

由①②相加, 整理得 $f(x+2) + f(x-1) = 0$, 所以 $f(x+3) + f(x) = 0$, 即 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6.

在 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ 中, 令 $y = 0$, 得 $f(x) + f(x) = f(x)f(0)$, 所以 $f(0) = 2$.

令 $x = 1, y = 1$, 得 $f(2) + f(0) = f(1)f(1)$, 所以 $f(2) = -1$.

由 $f(x+3) = -f(x)$, 得 $f(3) = -f(0) = -2, f(4) = -f(1) = -1, f(5) = -f(2) = 1, f(6) = -f(3) = 2$, 所以 $f(1) + f(2) + \dots + f(6) = 1 - 1 - 2 - 1 + 1 + 2 = 0$.

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 3[f(1) + f(2) + \dots + f(6)] + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 3 \times 0 + 1 - 1 - 2 - 1 = -3$, 故选 A.



7. D 【解析】因为 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $g(2-x)=g(2+x)$, 而 $f(x)+g(2-x)=5$, 故 $f(-x)+g(2+x)=5$, 故 $f(x)=f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数.

由 $g(2)=4, f(0)+g(2)=5, g(2)-f(-2)=7$, 得 $f(0)=1, f(-2)=f(2)=-3$.

由 $g(x)=f(x-4)+7$, 且 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, 则 $f(-2-x)=f(-2+x)=f(2+x)$, 则 $f(x)=f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

又由 $f(1)+g(1)=5, g(1)-f(-3)=g(1)-f(1)=7$, 得 $f(1)=f(-3)=f(3)=-1$,

又 $f(4)=f(0)=1$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 6f(1) + 6f(2) + 5f(3) + 5f(4) = 6 \times (-1) + 6 \times (-3) + 5 \times (-1) + 5 \times 1 = -24$, 故选 D.

一题多解

因为 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $g(2-x)=g(2+x), g(1)=g(3)$.

因为 $f(x)+g(2-x)=5$, 所以 $f(x)=5-g(2-x), f(0)=5-g(2)=1$.

因为 $g(x)-f(x-4)=7$, 所以 $f(x)=g(x+4)-7, g(4)=f(0)+7=8$.

因此 $g(x+4)=12-g(2-x)=12-g(x+2)=12-g(x-2+4)=12-[12-g(x)]=g(x), f(x)=\frac{1}{2}[g(x+4)-g(2-x)]-1=\frac{1}{2}[g(x+4)-g(x+2)]-1$.

于是 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{22} [g(k+4)-g(k+2)] - 22$
 $= \frac{1}{2} \{ [g(5)-g(3)] + [g(6)-g(4)] + [g(7)-g(5)] + \cdots + [g(25)-g(23)] + [g(26)-g(24)] \} - 22$
 $= \frac{1}{2} [g(25)+g(26)-g(3)-g(4)] - 22$
 $= \frac{1}{2} [g(1)+g(2)-g(3)-g(4)] - 22$
 $= -24$. 故选 D.

**方法总结**

①若 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称, 则 $f(a+x)=f(a-x)$ 恒成立;

②若 $f(a+x)+f(b-x)=c$, 则 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 中心对称.

8. 0 (答案不唯一) 1 【解析】若 $a=0$, 则

$$\text{函数 } f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ (x-2)^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{存在最小值}$$

0, 所以 a 的一个取值可以为 0.

若 $a < 0$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递增, 函数 $f(x)$ 不可能存在最小值.

若 $0 < a \leq 2$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$;

当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [0, +\infty)$.

若函数 $f(x)$ 存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq 0$, 解得 $0 < a \leq 1$.

若 $a > 2$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$; 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [(a-2)^2, +\infty)$.

若函数 $f(x)$ 存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$, 不等式无解.

综上, $0 \leq a \leq 1$, 所以 a 的最大值为 1.

9. 【解】 \because 函数 $f(x) = 2|x-a| - a =$

$$\begin{cases} 2x-3a, & x \geq a, \\ a-2x, & x < a, \end{cases} \quad a > 0, \text{ 作出其大致图象如}$$

图所示.

(1) 当 $2x-3a = x$ 时, $x = 3a$; 当 $a-2x = x$

时, $x = \frac{a}{3}$, $\because f(x) < x$, $\therefore \frac{a}{3} < x < 3a$, 即不

等式 $f(x) < x$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{a}{3} < x < 3a\right\}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的两个交

点分别为 A, B , 当 $2x-3a=0$ 时, $x = \frac{3a}{2}$; 当

$a-2x=0$ 时, $x = \frac{a}{2}$, 则函数 $y=f(x)$ 的图

象与 x 轴的交点坐标为 $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$,

$B\left(\frac{3a}{2}, 0\right)$, 则 $|AB| = \frac{3a}{2} - \frac{a}{2} = a$.

设函数 $y=a-2x$ 和 $y=2x-3a$ 的图象的交

点为 C , 联立 $\begin{cases} y=a-2x, \\ y=2x-3a, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=a, \\ y=-a, \end{cases}$ 即

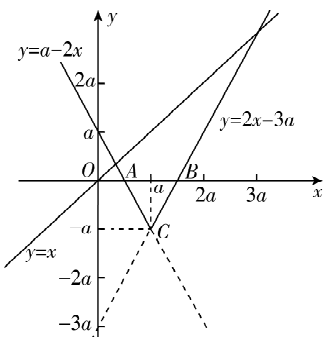
$C(a, -a)$, 由图可知曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴



所围成的图形为 $\triangle ABC$, 则 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot a = 2, \therefore a^2 = 4.$$

又 $a > 0, \therefore a = 2$.



素养上分

1. C 【解析】对于 A, 因为 $\pi \approx 3.14$, 根据取整函数的定义可知 $[\pi] = 3$, 故 A 错误;

对于 B, 函数 $f(x) = x - [x]$ 的定义域为 \mathbf{R} , 关于原点对称, $f(-x) = -x - [-x]$, 例如当 $x = 1.3$ 时, $f(1.3) = 1.3 - [1.3] = 1.3 - 1 = 0.3$, $f(-1.3) = -1.3 - [-1.3] = -1.3 - (-2) = 0.7$, $f(-1.3) \neq f(1.3)$, 所以 $f(x)$ 不是偶函数, 故 B 错误;

对于 C, 设 $n \in \mathbf{Z}$, 当 $n \leq x < n+1$ 时, $[x] = n$, 则 $f(x) = x - [x] = x - n$, 此时 $0 \leq x - n < 1$, 所以 $f(x) = x - [x]$ 的值域是 $[0, 1)$, 其最小值为 0, 故 C 正确;

对于 D, 若 $[x] = [y]$, 设 $[x] = [y] = n$, $n \in \mathbf{Z}$, 则 $n \leq x < n+1$, $n \leq y < n+1$, 那么 $-(n+1) < -y \leq -n$, 所以 $-1 < x - y < 1$, 所以不存在 $x, y \in \mathbf{R}$, 使得当 $[x] = [y]$ 时, $x - y = 1$, 故 D 错误. 故选 C.

2. ACD 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1]$. 对于 A, $g(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$ 的值域为 $[0, 1]$, A 正确;

对于 B, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$ 的值域为 $(0, 1]$, B 错误;

对于 C, $g(x) = 2|x|$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ 的值域为 $[0, 1]$, C 正确;

对于 D, $g(x) = -x^3$, $x \in [-1, 0]$ 的值域为 $[0, 1]$, D 正确. 故选 ACD.

3. C 【解析】对于 A, $\because y = |x| \sqrt{4-x^2} =$

$$\sqrt{x^2(4-x^2)} \leq \sqrt{\left(\frac{x^2+4-x^2}{2}\right)^2} = 2 \text{ (当且$$

仅当 $x^2 = 4 - x^2$, 即 $x = \pm\sqrt{2}$ 时取等号),
 $\therefore y = |x| \sqrt{4 - x^2}$ 在 $(-2, 2)$ 上的最大值为
 2, 与图象不符, A 错误.

对于 B, 当 $x \in (-2, 0)$ 时, $y = x \cdot$
 $\sqrt{4 - x^2} < 0$, 与图象不符, B 错误.

对于 D, 由 $-x^2 + 2x \geq 0$, 得 $0 \leq x \leq 2$, $\therefore y =$
 $\sqrt{-x^2 + 2x}$ 不存在 $x \in (-2, 0)$ 的部分的图
 象, D 错误.

对于 C, 设 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2|x|}$, 令 $-x^2 +$
 $2|x| \geq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq 2$, 故 $f(x)$ 的定
 义域为 $[-2, 2]$, $\therefore f(-x) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为
 偶函数, 其图象关于 y 轴对称. 当 $0 \leq x \leq$
 2 时, $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x} = \sqrt{-(x-1)^2 + 1}$,
 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 2)$ 上
 单调递减, 又 $f(0) = 0$, $f(x)_{\max} = f(1) =$
 1 , $f(2) = 0$, 结合图象的对称性可知 $y =$
 $\sqrt{-x^2 + 2|x|} (-2 < x < 2)$ 与题图②相符,
 故 C 正确. 故选 C.

4. BC 【解析】对于 A, 由题意, 因为函

数 $f(x) = \frac{9}{2} - \frac{2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,$
 $0) \cup (0, +\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty,$
 $0), (0, +\infty)$ 上单调递增, 所以若 $f(x) =$
 $\frac{9}{2} - \frac{2}{x}$ 存在“跟随区间” $[a, b]$, 则有

$$\begin{cases} a = \frac{9}{2} - \frac{2}{a}, \\ b = \frac{9}{2} - \frac{2}{b}, \end{cases} \text{ 即 } a, b \text{ 为 } x = \frac{9}{2} - \frac{2}{x} \text{ 的两}$$

根, 即 a, b 为 $2x^2 - 9x + 4 = 0 (x \neq 0)$ 的两
 个不相等的实数根, 解得 $a = \frac{1}{2}, b = 4$,

故 $f(x) = \frac{9}{2} - \frac{2}{x}$ 存在“跟随区间”
 $[\frac{1}{2}, 4]$, 故 A 错误;

对于 B, 若 $[1, a]$ 为 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 的
 “跟随区间”, 因为 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 在区
 间 $[1, a]$ 上单调递增, $f(x) \in [1, a^2 - 2a +$
 $2]$, 所以 $a^2 - 2a + 2 = a$, 解得 $a = 1$ 或 $a =$
 2 , 因为 $a > 1$, 所以 $a = 2$, 故 B 正确;

对于 C, 若 $f(x) = -x^2 + 2x$ 存在“3 倍跟随区
 间”, 则可设其定义域为 $[a, b]$, 值域为 $[3a,$
 $3b]$, 当 $a < b \leq 1$ 时, 易得 $f(x) = -x^2 + 2x$ 在区
 间 $[a, b]$ 上单调递增, 此时易得 a, b 为方程



$3x = -x^2 + 2x$ ($x \leq 1$) 的两根, 解得 $x = -1$ 或 $x = 0$, 故 $[-1, 0]$ 为 $f(x) = -x^2 + 2x$ 的“3 倍跟随区间”, 故 C 正确;

对于 D, 若函数 $f(x) = m - \sqrt{x+1}$ 存在“跟随区间”, 设为 $[a, b]$, 因为 $f(x) = m - \sqrt{x+1}$ 为减函数, 所以由跟随区间的定义可知

$$\begin{cases} b = m - \sqrt{a+1}, \\ a = m - \sqrt{b+1}, \end{cases} \text{ 则 } a - b = \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1},$$

则 $(a-b)(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}) = (a+1) - (b+1) = a - b$, 因为 $a < b$, 所以 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = 1$, 易得 $0 \leq \sqrt{a+1} < \sqrt{b+1} \leq 1$,

所以 $a = m - \sqrt{b+1} = m - (1 - \sqrt{a+1})$, 令

$t = \sqrt{a+1}$ ($t \in [0, 1)$), 代入化简可得 $t^2 - t - m = 0$, 同理 $t_1 = \sqrt{b+1} \in (0, 1]$ 也满足

$t^2 - t - m = 0$, 即 $t^2 - t - m = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上

有两个不相等的实数根, 故 $\begin{cases} 1+4m > 0, \\ -m \geq 0, \end{cases}$ 解

得 $m \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right]$, 故 D 错误. 故选 BC.

5. D



思路导引

ab 转化为 $[f(1) - f(0)] \cdot f(0)$, 根据二次函数配方法判断 ab 的范围, 再分析等号成立的条件即可得解.

【解析】 因为 $f(0) = b, f(1) = a + b$, 所以 $ab = [f(1) - f(0)] \cdot f(0) = -[f(0)]^2 + f(1)f(0) = -\left[f(0) - \frac{1}{2}f(1)\right]^2 + \frac{1}{4}[f(1)]^2$,

提示: 视 $f(0)$ 为未知数, 然后配方

故 $ab \leq \frac{1}{4}[f(1)]^2 \leq \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$, 当 $f(0) = \frac{1}{2}f(1), |f(1)| = 2$, 即 $a = b = 1$ 或 $a = b = -1$ 时, 等号成立, 故选 D.

6.4 047 【解析】 令 $x = 0$, 可得 $f(0 + f(y)) = f(f(y)) = f(f(0)) + y$ ①,

将 $y = f(y)$ 代入 ① 中, 得 $f(f(f(y))) = f(f(0)) + f(y)$ ②.

方法: 迭代法的使用

根据题设及 ① 有 $f(f(f(y))) = f(f(f(0)) + y) = f(f(y)) + f(0)$ ③,



联立①②③, 有 $f(f(0)) + f(y) = f(f(y)) + f(0) = f(f(0)) + y + f(0)$,

即 $f(y) = y + f(0)$.

令 $y=1$, 可得 $f(0) = 2\ 023$, 因此 $f(2\ 024) = 2\ 024 + f(0) = 2\ 024 + 2\ 023 = 4\ 047$.

7. $\frac{1}{3}$



思路导引

根据题目得到 $a > 0$,

$b^2 - 4ac \leq 0$ ($b > a$), 从而 $c \geq \frac{b^2}{4a}$, 故

$$\frac{b-a}{a+b+c} \leq \frac{\frac{b}{a}-1}{1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}, \text{换元后结合基本}$$

不等式求出最值.

【解析】 $\because f(x) \geq 0$ 恒成立, $\therefore a > 0, b^2 - 4ac \leq 0$ ($b > a$), $\therefore a^2 < b^2 \leq 4ac$, $\therefore c \geq \frac{b^2}{4a}$,

$$\therefore \frac{b-a}{a+b+c} \leq \frac{b-a}{a+b+\frac{b^2}{4a}} = \frac{\frac{b}{a}-1}{1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}.$$

$$\text{令 } t = \frac{b}{a} - 1 > 0, \text{ 则 } \frac{b}{a} = t + 1, \text{ 所以 } \frac{b-a}{a+b+c} \leq \frac{t}{1+(t+1)+\frac{1}{4}(t+1)^2} = \frac{4t}{t^2+6t+9} =$$

$$\frac{4}{t+\frac{9}{t}+6} \leq \frac{4}{2\sqrt{t \cdot \frac{9}{t}}+6} = \frac{1}{3}, \text{ 当且仅当}$$

$$t = \frac{9}{t}, \text{ 即 } t = 3, \frac{b}{a} = 4 \text{ 时, 等号成立.}$$

故 $\frac{b-a}{a+b+c}$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

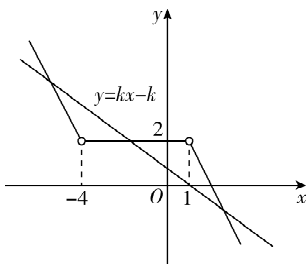
8. $\left(-2, -\frac{2}{5}\right)$

【解析】 由题设, $y = k(x-1)$

的图象恒过点 $(1, 0)$, 作出函数 $y = kx - k$

$$\text{与函数 } y = \begin{cases} -2x-6, & x < -4, \\ 2, & -4 < x < 1, \\ -2x+4, & x > 1 \end{cases} \text{ 的大致图象,}$$

如图所示.



显然, 当 $k \geq 0$ 时, 两图象不可能有 3 个

交点,所以 $k < 0$.

当直线过点 $(-4, 2)$ 时,两图象有 1 个交

点,此时 $k = \frac{2-0}{-4-1} = -\frac{2}{5}$.

当直线 $y = kx - k$ 与直线 $y = -2x - 6$, $y = -2x + 4$ 平行时,两图象有 1 个交点,此时 $k = -2$.

由图知,当 $-2 < k < -\frac{2}{5}$ 时,两图象有 3 个交点.

第三章 全章上分

1. D 【解析】依题意得 $\begin{cases} 1 - \sqrt{2x-1} \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0, \end{cases}$ 解

得 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, 所以 $f(x)$ 的定义域为

$[\frac{1}{2}, 1]$, 故选 D.

2. C 【解析】对于 A, 幂的指数 $a < 0$, 则 $y =$

$ax - \frac{1}{a}$ 应为减函数, A 错误;

对于 B, 幂的指数 $a > 1$, 则 $y = ax - \frac{1}{a}$ 应为增函数, B 错误;

对于 D, 幂的指数 $a < 0$, 则 $-\frac{1}{a} > 0$, 即直

线 $y = ax - \frac{1}{a}$ 与 y 轴的交点在 x 轴上方,

D 错误. 故选 C.

3. A 【解析】幂函数 $f(x) = (m^2 - 3)x^{m^2 + 2m - 3}$

在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore \begin{cases} m^2 - 3 = 1, \\ m^2 + 2m - 3 > 0, \end{cases}$ 解得 $m = 2, \therefore f(x) = x^5$,

$\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为奇函数, 由 $a + b > 0$, 得 $a > -b$.

$\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, $\therefore f(a) >$

$f(-b) = -f(b), \therefore f(a) + f(b) > 0$ 恒成立.

故选 A.

4. C 【解析】由题知, 当 AQI 大于 200 时,

不宜开展户外活动, 即当 AQI 小于等于 200 时, 适宜开展户外活动, 即 $y \leq 200$,

因为 $y = \begin{cases} -10t + 290, & 0 \leq t \leq 12, \\ 56\sqrt{t} - 24, & 12 < t \leq 24, \end{cases}$ 所以当

$0 \leq t \leq 12$ 时, 只需 $-10t + 290 \leq 200$, 解得

$9 \leq t \leq 12$, 当 $12 < t \leq 24$ 时, 只需 $56\sqrt{t} -$



$24 \leq 200$, 解得 $12 < t \leq 16$,

综上, 适宜开展户外活动的时段为 $9 \leq t \leq 16$, 共计 7 个小时. 故选 C.

5. C 【解析】 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $f(-2) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(2) = -f(-2) = 0$, $f(0) = 0$, 所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$.

$(x+1)[f(x) - 2f(-x)] < 0$ 可化为 $3(x+1)f(x) < 0$, 可得

$$\begin{cases} x+1 < 0, \\ f(x) > 0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+1 > 0, \\ f(x) < 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x < -1, \\ -2 < x < 0 \text{ 或 } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} x > -1, \\ x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 2, \end{cases}$$

解得 $-2 < x < -1$ 或 $0 < x < 2$. 故选 C.

6. C 【解析】 \because 当 $x_2 > x_1 > 1$ 时, $[f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) < 0$ 恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

又 \because 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, $\therefore a = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$.

又 $\because b = f(2)$, $c = f(\pi)$, 且 $2 < \frac{5}{2} < \pi$,

$\therefore f(2) > f\left(\frac{5}{2}\right) > f(\pi)$, 即 $b > a > c$.

归纳总结

比较函数值的大小时, 应先将自变量转化到同一个单调区间内, 然后利用函数的单调性解决.

7. BD 【解析】对于 A: 函数 $y = x^a$ 的图象恒过点 $(1, 1)$, 故 A 错误;

对于 B: 因为 $g(-x) + g(x) = 6$, 则 $\frac{g(x) + g(-x)}{2} = 3$, 故 $g(x)$ 的图象关于点 $(0, 3)$ 对称, 故 B 正确;

对于 C: 因为 $x > 0$, 所以 $y = x + \frac{3}{x+1} - 1 = x +$

$$1 + \frac{3}{x+1} - 2 \geq 2\sqrt{(x+1) \times \frac{3}{x+1}} - 2 = 2\sqrt{3} -$$

2, 当且仅当 $x = \sqrt{3} - 1$ 时取得等号, 故 C 错误;

对于 D: 要使 $g(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$ 有意义, 则 $-x^2 - x + 2 \geq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq 1$, 则 $g(x)$



的定义域为 $[-2, 1]$, 由复合函数的单调性可得 $g(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$ 在 $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减, 故 D 正确. 故选 BD.

8. BCD 【解析】对于 A, 由函数 $f(x)$ 为幂函数, 得 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = -1$ 或 2.

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意;


当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^{-2}$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意. 故 $m = 2$, 故 A 错误.

对于 B, 由选项 A 知 $f(x) = x^{-2}$, 可得 $f(-1) = 1$, 故 B 正确.

对于 C, 由函数 $f(x)$ 为偶函数, 可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 可得 $f(b) > f(a)$, 故 C 正确.

对于 D, 由 $f(x) = x^{-2}$, $a > b > 0$, 知

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{8}{(a+b)^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{8}{4ab} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 > 0,$$

 **提示**: 因为 $a \neq b$, 所以此处应用基本不等式后, 等号不成立

可得 $f(a) + f(b) > 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 故 D 正确. 故选 BCD.

9. ACD 【解析】对于 A, 由 $f(2x+2)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, 得 $f(2(x-1)+2) = f(2(-x-1)+2)$, 即 $f(2x) = f(-2x)$, 而函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $f(x) = f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数, A 正确;

对于 B, 由 $f(x+1) + f(x-1) = 2$, 得 $f(1) + f(-1) = 2$, 即 $2f(1) = 2$, 解得 $f(1) = 1$, B 错误;

对于 C, 由 $f(x+1) + f(x-1) = 2$, 得 $f(x+2) = -f(x) + 2$, 则 $f(x+4) = -f(x+2) + 2 = -[-f(x) + 2] + 2 = f(x)$, 函数 $f(x)$ 的周期为 4. 由 $g(x) - f(x-4) = 8$, 得 $g(x) = f(x-4) + 8$, $g(x+4) = f(x) + 8 = f(x-4) + 8 = g(x)$, 则函数 $g(x)$ 的周期为 4, $g(2\ 025) = g(506 \times 4 + 1) = g(1) = f(1) + 8 = 9$, C 正确;

对于 D, 由 $f(x+2) = -f(x) + 2$, 得 $f(x+4) = f(x)$, 故 D 正确.



$2) + f(x) = 2$, 则 $f(1) + f(3) = f(2) + f(4) = 2$, 所以 $g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = 32 + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 36$.
 由 $f(0) = 2$, 得 $f(2) = -f(0) + 2 = 0$, 所以 $g(1) + g(2) = 9 + f(2) + 8 = 17$, 所以 $g(1) + g(2) + \cdots + g(22) = 5[g(1) + g(2) + g(3) + g(4)] + g(1) + g(2) = 5 \times 36 + 17 = 197$, D 正确.

故选 ACD.

10. $2x^2 - 8x + 9$ 【解析】设 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, $f(t) = 2(t-1)^2 + 1 = 2t^2 - 4t + 3$, 所以 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, 所以 $f(x-1) = 2(x-1)^2 - 4(x-1) + 3 = 2x^2 - 4x + 2 - 4x + 4 + 3 = 2x^2 - 8x + 9$.

11. $\frac{1}{4}$ 【解析】令 $x=y=1$, 得 $f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

令 $x=y=-1$, 得 $f(1) = -2f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$.

令 $x=y=2$, 得 $f(4) = 4f(2) = 4$.

令 $x=-\frac{1}{4}, y=4$, 得 $f(-1) = -\frac{1}{4}f(4) +$

$4f(-\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}f(4) = \frac{1}{4}$.

所以 $f(-1) + f(-\frac{1}{4}) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

12. $\sqrt{2}$ 【解析】 x, y 都是正数, 令 $\frac{1}{x} = 2x$,

则 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\max \left\{ \frac{1}{x}, 2x \right\} =$

$\begin{cases} \frac{1}{x}, 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2x, x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 其最小值是 $\sqrt{2}$.

令 $\frac{2}{y} = y$, 则 $y = \sqrt{2}$, $\max \left\{ \frac{2}{y}, y \right\} =$

$\begin{cases} \frac{2}{y}, 0 < y \leq \sqrt{2}, \\ y, y > \sqrt{2}, \end{cases}$ 其最小值是 $\sqrt{2}$.

因为 $\max \left\{ \frac{1}{x}, \frac{2}{y}, 2x, y \right\} \geq \max \left\{ \frac{1}{x}, 2x \right\} \geq \sqrt{2}$, $\max \left\{ \frac{1}{x}, \frac{2}{y}, 2x, y \right\} \geq$

$\max \left\{ \frac{2}{y}, y \right\} \geq \sqrt{2}$,

所以 $\max \left\{ \frac{1}{x}, \frac{2}{y}, 2x, y \right\}$ 的最小值为



$\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \sqrt{2}$ 时取得.

13. 【解】(1) 由题意可得 $f(0) = \frac{a \times 0 + b}{4 - 0} = 0$,

所以 $b = 0$, 又 $f(-1) = \frac{-a}{4 - (-1)^2} = -\frac{1}{3}$,

所以 $a = 1$, 所以 $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$, 此时

有 $f(-x) = \frac{-x}{4 - x^2} = -f(x)$, 即 $f(x)$ 的图象

关于原点对称, 故 $a = 1, b = 0$.

(2) $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增. 证明如下:

令 $-2 < x_1 < x_2 < 2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{4 - x_1^2} -$

$$\frac{x_2}{4 - x_2^2} = \frac{4x_1 - x_1x_2^2 - 4x_2 + x_2x_1^2}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)}$$

$$= \frac{4(x_1 - x_2) + x_1x_2(x_1 - x_2)}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)}$$

$$= \frac{(4 + x_1x_2)(x_1 - x_2)}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)},$$

由 $-2 < x_1 < x_2 < 2$, 知 $4 + x_1x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0, (4 - x_1^2)(4 - x_2^2) > 0$, 故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增.

(3) 由题意可得 $f(x)$ 为奇函数, 则有 $f(2x+1) > -f(x-2) = f(2-x)$,

又 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增, 则有

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-x, \\ 2x+1 < 2, \\ -2 < 2-x, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}.$$

因此所求不等式的解集为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

14. 【解】(1) 当 $x \leq 5$ 时, $y = 60x - 120$, 令 $60x - 120 > 0$, 得 $x > 2$, 又 $\because x \in \mathbf{N}^*$, $\therefore 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{N}^*$;

当 $x > 5$ 时, $y = [60 - 2(x - 5)]x - 120 = -2x^2 + 70x - 120$, 令 $-2x^2 + 70x - 120 > 0$,

又 $\because x \in \mathbf{N}^*, \therefore 2 \leq x \leq 33, x \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore 6 \leq x \leq 33, x \in \mathbf{N}^*$.

综上所述, $y = f(x) =$

$$\begin{cases} 60x - 120 (3 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{N}^*), \\ -2x^2 + 70x - 120 (6 \leq x \leq 33, x \in \mathbf{N}^*). \end{cases}$$

(2) 当 $3 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x) = 60x - 120$, 显然当 $x = 5$ 时, $f(x)$ 的值最大, 最大值为 $f(5) = 180$;

当 $6 \leq x \leq 33, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x) = -2x^2 +$



$$70x - 120 = -2 \left(x - \frac{35}{2} \right)^2 + \frac{985}{2},$$

故当 $x = 17$ 或 18 时, $f(x)$ 的值最大, 最大值为 $f(17) = f(18) = 492 > 180$.


综上所述, 当每辆电动观光车的日租金为 17 元或 18 元时, 才能使一日的净收入最多.

15. 【解】(1) 因为函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

在 $[0, 3]$ 上也单调递增.

又因为 $f(x)_{\min} = f(0) = 0, f(x)_{\max} = f(3) = 3$, 所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ 的值域为 $[0, 3]$, 所以 $[0, 3]$ 为函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ 的“优美区间”.

(2) 因为 $g(x) = 2a - \frac{15}{x}$ 在 $[m, n]$ ($m, n \in \mathbf{N}$) 上单调递增, 又 $[m, n]$ ($m, n \in \mathbf{N}$) 为 $g(x)$ 的“优美区间”, 所以 $g(m) = m, g(n) = n$,

 **提示:** 函数 $f(x)$ 在闭区间上为单调函数, 则 $f(x)$ 分别在两端点处取得最值

所以 m, n 是方程 $2a - \frac{15}{x} = x$ 的两个不等的正整数根, 即 m, n 是 $x^2 - 2ax + 15 = 0$ 的两个不等的正整数根,

$$\text{所以} \begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4 \times 15 > 0, \\ m+n=2a, \\ mn=15, \\ m, n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } m < n, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m=1, \\ n=15, \\ a=8 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} m=3, \\ n=5, \\ a=4, \end{cases} \text{ 所以 } a \text{ 的最小值为 } 4.$$

(3) $h(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 假设 $[m, n] \subseteq (-\infty, 0)$ 或 $[m, n] \subseteq (0, +\infty)$,

则 $h(x) = \frac{(t^2+t)x-1}{t^2x} = \frac{t+1}{t} - \frac{1}{t^2x}$ 在 $[m, n]$ 上单调递增.

又 $[m, n]$ 是函数 $h(x)$ 的“优美区间”, 所以 $h(m) = m, h(n) = n$, 所以 m, n 是方程 $\frac{(t^2+t)x-1}{t^2x} = x$ 的两个不等的实数



根,即 m, n 是 $t^2x^2 - (t^2+t)x + 1 = 0$ 的两个同号且不等的实数根,所以 $\Delta = (t^2+t)^2 - 4t^2 > 0 \Rightarrow t > 1$ 或 $t < -3$.

$$\text{又 } \begin{cases} m+n = \frac{t+1}{t}, \\ mn = \frac{1}{t^2}, \end{cases} \text{ 所以 } n - m =$$

$$\sqrt{(m+n)^2 - 4mn} = \sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 - \frac{4}{t^2}} =$$

$$\sqrt{-3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}, \text{ 当 } t = 3 \text{ 时, } n - m$$

取得最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.